

3. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta \mu(x-1)}{x^2+4x-5} = \frac{1}{6}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k \cdot \eta \mu \frac{1}{x}}{\eta \mu x} = 0 \quad (k \geq 2)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + \eta \mu 2x + \eta \mu 3x + \dots + \eta \mu nx}{x} = \frac{1}{2} n(n+1).$

4. Να βρεθεί ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου $P(x)$, για το οποίο ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta \mu x \cdot P(x) + 1| - |\eta \mu x \cdot P(x) - 1|}{x} = 2.$

5. Αν για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $|x f(x)| \leq |\eta \mu x - x|$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

6. Να αποδειχθεί ότι α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta \mu \frac{1}{x}}{x + \sqrt{x}} = 0$ και β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \epsilon \varphi \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{x^2} + x} = 0.$

7. α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $0 < \frac{\eta \mu x}{x} < 1.$
β) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x - \eta \mu x}{x + \eta \mu x}$ στο $x_0 = 0.$

8. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \epsilon \varphi x}{2f(x) + 1 - \epsilon \varphi x}.$

Μη πεπερασμένο όριο -----

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2}{|x|}$ β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4x + 4}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x + 4}{2 - |x|}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 4}{x^2 - 3x + 2}$ στ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{(x-2)^3}$ ζ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - 3 \eta \mu(\frac{\pi x}{2})}{x + 2\sqrt{x} - 3}$ η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+8} - 2}$

θ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2x^5 + x - 2| - |2x^5 - x + 2| + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ ι) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\epsilon \varphi x)$ ια) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\epsilon \varphi x)$

ιβ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \eta \mu^2 x - 5 \epsilon \varphi x}{\eta \mu x}$ ιδ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{x^3}, a > 0$ ιε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}$

ισ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon \varphi x}{x - \eta \mu x}$ ις) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$ ιζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

2. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε καθεμία από τα παρακάτω όρια να είναι πεπερασμένο.

α) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \lambda x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\lambda x^2 - 3x + 2}{(x+1)^4}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2v} - 2x^v - 1}{(x-1)^2}, v \in \mathbb{N}^*$

δ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2v} + 2x + 1}{x+1}, v \in \mathbb{N}^*$ ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$

3. Να βρεθούν οι $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν όριο στο σημείο $x_0 = 1.$

α) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + bx + 2}{|x-1|}, & x < 1 \\ a + (x-1)^2 \eta \mu(\frac{1}{x-1}), & x > 1 \end{cases}.$

8. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β στις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x + \beta - \sqrt{x^2 - x + 3}) = 0$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 1} + \alpha x + \beta) = 2$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\alpha x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 8x}) = -1$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x \cdot \eta \mu \alpha) = \epsilon \cup \nu \beta$.

9. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ σε κάθε περίπτωση.

α) $\left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 - x} - x} \right) + 2\lambda \right| \leq \frac{1}{2}$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x - \lambda^2) \in [-1, 0]$.

10. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{3x^2 - 1})$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3})$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt[4]{x^4 + 1} - 2\sqrt{x^2 + x})$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt{x^2 + 1} + 2\sqrt{4x^2 + x + 2} - 7x)$.

11. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt[3]{x^3 + x}$ στο $+\infty$.

12. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{4x^2 + x} + \alpha x + \beta) = 0$.

13. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = x \cdot (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}})$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

14. Αφού βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 1})$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάστημα $(\alpha, +\infty)$, στο οποίο ισχύει $(x^2 + x)^3 > (x^3 + 1)^2$.

15. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$, η πλευρά AB είναι σταθερή, ενώ το σημείο Γ απομακρύνεται συνεχώς από το A .

Να αποδειχθεί ότι τα ενδύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Gamma$ τείνουν να γίνουν ίσα.

16. Αν $k \in \mathbb{Z}$, να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = x^k \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ στο $+\infty$.

17. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^k \cdot (\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - 1))$ για τις διάφορες ακεραίες τιμές του k .

18. Αν $k \in \mathbb{N}^*$, να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = x + \sqrt[k]{x^2 + 1}$ στο $-\infty$.