Ερωτήσεις κατανόησης κεφ. 1 σελίδας 201 - 203

I

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώστε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1.

Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g\,o\,f)(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in R^*$ Α Ψ

β) $(f\,o\,g)(x) = -x$, $x \in R$ Α Ψ

Αιτιολογία

α) Είναι ψευδής διότι

$D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

Το πεδίο ορισμού της $g\,o\,f$ είναι το σύνολο

$D_{gof} = \{ x \in D_f$ με $f(x) \in D_g \}$, δηλαδή $x > 0$ με $\ln x \in R \Rightarrow x > 0$

Άρα $D_{gof} = (0, +\infty)$ και όχι το R^*

β) Είναι αληθής διότι

$D_{fog} = \{ x \in D_g$ με $g(x) \in D_f \}$, δηλαδή $x \in \mathbb{R}$ με $e^{-x} > 0$, οπότε

$D_{fog} = \mathbb{R}$ και $(f\,o\,g)(x) = f(g(x)) = \ln e^{-x} = -x$

2.

Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Θέτω $\dfrac{f(x)}{x-1} = g(x)$ με $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \ell$.

Τότε $f(x) = (x-1)g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)g(x) = 0 \cdot \ell = 0$

3.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής, διότι ο πολλαπλασιασμός $0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}$ δε δίνει αποτέλεσμα 0,

αφού είναι η απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$ ή $0(-\infty)$

4.

Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε

κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$ Α Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής, διότι μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

Π. x Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases}$

είναι $f(x)>1$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

5.

Ισχύει : α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$ Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ Α Ψ

Αιτιολογία

Το (α) είναι αληθής διότι :

Θέτω $\dfrac{1}{x}=u$, οπότε $u\to 0$.

Αλλά $\dfrac{1}{u}=x$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu u\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=1$

Το (β) είναι ψευδής διότι :

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{1}{|x|}|\eta\mu x|\le\frac{1}{|x|}\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$$

Επειδή όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

6.

Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$ A Ψ

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$0 \le f(x) \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 f(x) \le x^2$ και επειδή $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$.

7.

Αν $f(x) \le \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι A Ψ

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Λύση

Είναι ψευδής . Μπορεί η f να μην έχει καν όριο στο $+\infty$

8.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)g(6)$ A Ψ

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι δεν ξέρουμε αν η $f(x)g(x)$ είναι συνεχής στο 6.

9.

Αν $\lim_{x\to x_o}|f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι A Ψ

$\lim_{x\to x_o} f(x) = 1$ ή $\lim_{x\to x_o} f(x) = -1$

Αιτιολογία

Είναι ψευδής διότι μπορεί το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει.

Π .χ Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχουμε

$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|} = 1$ ενώ το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

10.

Αν $\lim_{x\to x_o}|f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ — Α — Ψ

Αιτιολογία

Από τον ορισμό του ορίου (είναι εκτός ύλης) έχουμε

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}[f(x)-\ell] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}|f(x)-\ell| = 0$$

Για ℓ=0 προκύπτει το ζητούμενο

11.

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$ ισχύει

$f(x) = \dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε $f(4) = 1$ — Α — Ψ

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

$$\text{f συνεχής} \Rightarrow f(4) = \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x-3) = 1$$

12.

Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,\ 1]$ και $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$,

τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_o \in (-1,\ 1)$ έτσι ώστε

$f(x_o) = \pi$ — Α — Ψ

Αιτιολογία

Είναι αληθής διότι :

Η f συνεχής στο $[-1,\ 1]$, $f(-1) \neq f(1)$ και $3 < \pi < 4$

Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_o \in (-1,\ 1)$ έτσι ώστε $f(x_o) = \pi$

II

Κυκλώστε την σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις

1.

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to x_o} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_o

τότε κατ' ανάγκη θα είναι :

A) $\ell < m$ Β) $\ell \le m$ Γ) $\ell \le m$

Δ) $\ell = m$ Ε) $m < \ell$

2.

Το όριο $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με

Α. 8   Β. 1   Γ. 0   Δ. $+\infty$ Ε -8

3.

Το $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με

Α. $+\infty$ Β. $-\infty$ Γ. 1   Δ. -1 Ε 0

4.

Αν το $\lim_{x\to x_o} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε

Α. $x_o = 0$ Β. $x_o = 2$ Γ. $x_o = -1$ Δ $x_o = 1$

III

1.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο :

A) η g είναι συνεχής στο 2

B) η f είναι συνεχής στο 1

Γ η g έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2.

Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλά ορισμένα;

A $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$

B. $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

Δ. $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

E $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x+1)]$

ΣΤ. $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x-1)]$

3.

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = [0,\ 3]$ με

$f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $f(3) = -1$

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

A. Υπάρχει $x_o \in (0,\ 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = 0$

B. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

Γ. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Δ. $[-1,\ 2] \subseteq f(\Delta)$

E Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,\ 3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη το -1