

Λυμένο παράδειγμα 2 / Σελ. 138

Να δείξετε $x^v - a^v = (x - a)(x^{v-1} + ax^{v-2} + a^2x^{v-3} + a^3x^{v-4} + \dots + a^{v-1})$

Έστω $P(x) = x^v - a^v \mid x - a$

$P(a) = a^v - a^v = 0 \Rightarrow x - a$ παράγοντας $P(x) = x^v - a^v$

v	$v-1$	$v-2$	$v-3$		
1	0	0	0	...	0 - a^v
↓	a	a^2	a^3		a^v
1	a	a^2	a^3		a^{v-1}
					0

$$x^v - a^v = (x - a)(x^{v-1} + ax^{v-2} + a^2x^{v-3} + a^3x^{v-4} + \dots + a^{v-1})$$

$$\text{Είσοδος: } x^v - a^v = (x - a) \cdot (x^{v-1} + a \cdot x^{v-2} + a^2 \cdot x^{v-3} + a^3 \cdot x^{v-4} + \dots + a^{v-1})$$

Συμπεράσματα:

$$x^5 - a^5 = (x - a) \cdot (x^4 + a \cdot x^3 + a^2 \cdot x^2 + a^3 \cdot x + a^4)$$

$$x^7 - a^7 = (x - a) \cdot (x^6 + a x^5 + a^2 x^4 + a^3 x^3 + a^4 x^2 + a^5 x + a^6)$$

$$x^4 - a^4 = (x - a) \cdot (x^3 + a x^2 + a^2 x + a^3)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a) \cdot (x^2 + a x + a^2)$$

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 2^2)$$

Θεώρημα (των ακέραιων ριζών)

Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές, έχει
ακέραια ρίζα p , τότε το p είναι διαιρέτης του σταθερού όρου.

Εφαρμογή 1 / Σελ. 142.

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0 \quad (1)$$

Αν $p \in \mathbb{Z}$ ρίζα της (1) $\Rightarrow p \in \Delta(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$

$\begin{array}{rrrr l} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ \downarrow & & & & \\ 1 & -2 & -1 & 1 & \end{array}$	$\begin{array}{rrrr l} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ \downarrow & & & & \\ 1 & -4 & 5 & -3 & \end{array}$
---	--

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ \downarrow & & & & \\ 1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \quad \vee \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$x=2$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Εφαρμογή 2 / Σελ 142

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4 = 0 \quad (1)$$

Αν $p \in \mathbb{Z}$ $p \mid 2 \Rightarrow p \in \Delta(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

όλοι οι γνωστοί δείκτες $\Rightarrow$ όχι δυνατή $p \mid 2$.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 9 & 8 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -5 & -3 & \\ \hline 1 & 4 & 5 & 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Σελ. 146-147
δυν. 1, 2, 3
όχι

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 9 & 8 & 4 & -2 \\ \downarrow & -2 & -6 & -6 & -4 & \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$(1) \Rightarrow (x+2)^2 (x^2 + x + 1) = 0 \quad \rightarrow$$

$$x+2=0 \quad \wedge \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = -2$$

$$D = \dots$$