

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{e^3 - 8}{e^2 + 4e - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

α) $\frac{w^3 - 8}{w^2 + 4w - 12} > 0 \Leftrightarrow$ Πρέπει: $w^2 + 4w - 12 \neq 0 \Leftrightarrow$

$(w^3 - 8)(w^2 + 4w - 12) > 0 \Leftrightarrow w_{1,2} = \begin{cases} -6 \\ 2 \end{cases}$

Βρίσκω τις ρίζες του κάθε παράγοντα
 $w^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow w = 2$
 $w^2 + 4w - 12 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -6, w_2 = 2$

Αρα το πεδίο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R} - \{-6, 2\}$

$w^3 - 8$	-	-	0	+
$w^2 + 4w - 12$	+	0	-	+
$P(w)$	-	+	+	+

$w^3 > 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{w^3} > \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow w > 2$

Η ανίσωση αληθεύει για $w \in (-6, 2) \cup (2, +\infty)$

Υπενθυμίζουμε, πως έχουμε μια ανίσωση ως κομμάτι:

$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0$ και $B(x) \neq 0$.

$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \leq 0$ και $B(x) \neq 0$.

Απόδειξη: $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{B^2(x)}{B^2(x)} \geq \frac{B^2(x)}{B^2(x)} \cdot 0 \Leftrightarrow B^2(x) \cdot \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow B(x) \cdot A(x) \geq 0$

(b) $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$ | Ανά το (2) έχω λύσει με αρίθμηση

$$\frac{w^3 - 8}{w^2 + 4w - 12} > 0 \iff w \in (-6, 2) \cup (2, +\infty).$$

Περίπτωση:

$e^{2x} + 4e^x - 8 \neq 0$ (KA) $\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0$

(-) Έτω $e^x = w$

$w^2 + 4w - 12 \neq 0$ και $\frac{w^3 - 8}{w^2 + 4w - 12} > 0 \iff w \in (-6, 2) \cup (2, +\infty)$

$w \neq -6$ και $w \neq 2$

$e^x \neq -6$ και $e^x \neq 2$

Ανθεξίη άύα ά $\ln e^x \neq \ln 2$
 $x \neq \ln 2$

Άρα $x \in (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$

$-6 < w < 2$

$-6 < e^x < 2$

$e^x > -6$ και $e^x < 2$

Ανθεξίη άύα

ή

$e^x < 2$

$\ln e^x < \ln 2$

$x < \ln 2$

$w > 2$

$e^x > 2$

$\ln e^x > \ln 2$

$x > \ln 2$