

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$



θυμάμαι πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.

Γνωρίζω πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

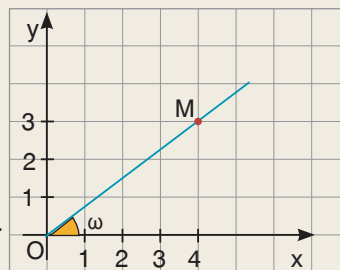
Μαθαίνω να υπολογίζω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέραμε την ημιευθεία OM , που σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία ω .

1. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M και να υπολογίσετε την απόσταση του M από την αρχή O .
2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

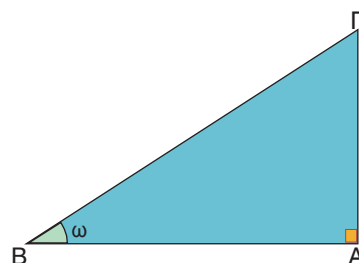


Στην προηγούμενη τάξη μάθαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου γνωρίζουμε τις πλευρές του. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AG}{BG}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

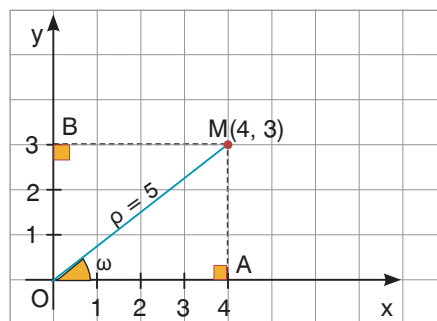
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}} = \frac{AG}{AB}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.

Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy πάρουμε το σημείο $M(4, 3)$ και φέρουμε $MA \perp x'x$ και $MB \perp y'y$, τότε έχουμε $OA = 4$ και $OB = AM = 3$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \angle x'OM$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM .

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο αυτό για την απόσταση $\rho = OM$ έχουμε $\rho^2 = 4^2 + 3^2$, οπότε $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Άρα



$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O}$$

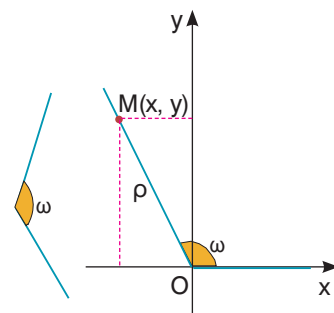
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M}$$

Με τη βοήθεια όμως ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω και όταν αυτή δεν είναι οξεία.

Αν έχουμε μία αμβλεία γωνία ω , τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy , έτσι ώστε η κορυφή της να συμπίπτει με την αρχή O , η μία πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα Ox και η άλλη της πλευρά να βρεθεί στο 2ο τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$, διαφορετικό από το O , τότε για την απόσταση $\rho = OM$ ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

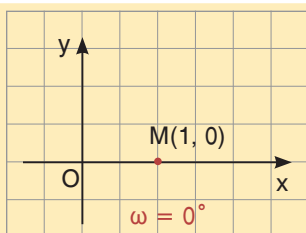
$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x > 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\epsilon\phi\omega > 0$.
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x < 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, $\epsilon\phi\omega < 0$.

Οι προηγούμενοι τύποι γενικεύονται και όταν $\omega = 0^\circ$ ή $\omega = 90^\circ$ ή $\omega = 180^\circ$.

Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0° , 90° και 180° .

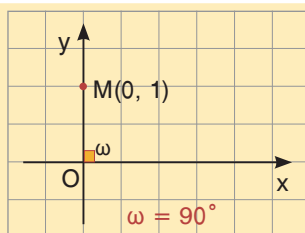


Αν M σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το $M(1, 0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

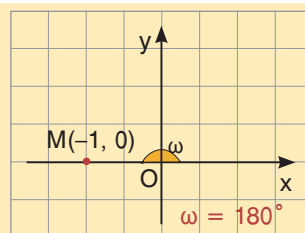


Αν M σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το $M(0, 1)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται
(γιατί $x=0$)



Αν M σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το $M(-1, 0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$ και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

Υπενθυμίζουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° και 60° που φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- 1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy παίρνουμε το σημείο $M(-4, 3)$.
Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$.

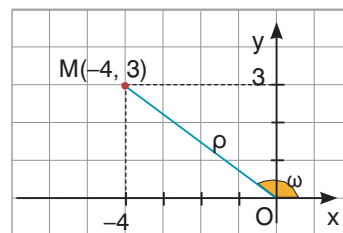
Λύση

Για την απόσταση $OM = \rho$ έχουμε:

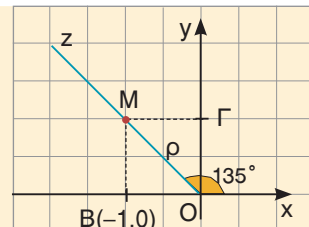
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{Άρα: } \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{και } \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$



- 2 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy φέρουμε ημιευθεία Oz, ώστε $\widehat{xOz} = 135^\circ$. Πάνω στην Oz παίρνουμε το σημείο M με τετμημένη -1.
Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{xOM} = 135^\circ$.



Λύση

Φέρουμε $MB \perp x'x$ και $M\Gamma \perp y'y$. Επειδή $\widehat{xOM} = 135^\circ$ και $\widehat{xOy} = 90^\circ$ θα είναι $\widehat{OM\Gamma} = 45^\circ$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

Άρα $OG = M\Gamma = OB = 1$ και η τεταγμένη του σημείου M είναι $y = 1$.

Δηλαδή έχουμε $M(-1, 1)$ και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$\text{Άρα } \eta\mu 135^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 135^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1.$$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Για το σημείο $M(5, 12)$ είναι $\rho = OM = 13$. Αν $\omega = \widehat{xOM}$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
 $\eta\mu\omega = \dots\dots\dots$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \dots\dots\dots$ $\epsilon\phi\omega = \dots\dots\dots$

- 2 Αν η γωνία $\omega = \widehat{x\hat{O}M}$ είναι αμβλεία, τότε να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με το σύμβολο $>$ ή $<$.
 $\eta\mu\omega \dots 0$ $\sigma\upsilon\nu\omega \dots 0$ $\epsilon\phi\omega \dots 0$

- 3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

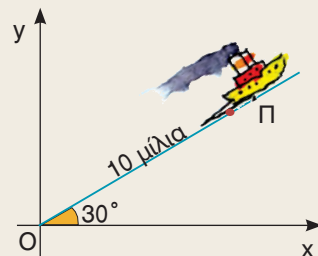
Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 90^\circ$	
β. $\sigma\upsilon\nu 180^\circ$	1. 0
γ. $\epsilon\phi 0^\circ$	
δ. $\sigma\upsilon\nu 90^\circ$	2. -1
ε. $\eta\mu 0^\circ$	
στ. $\epsilon\phi 180^\circ$	3. 1
ζ. $\sigma\upsilon\nu 0^\circ$	
η. $\eta\mu 180^\circ$	

α	β	γ	δ	ε	στ	ζ	η

- 4 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$. ☐
- β) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $\epsilon\phi\omega < 0$. ☐
- γ) Αν για τη γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega > 0$, τότε η ω είναι οξεία. ☐
- δ) Το ημίτονο οποιασδήποτε γωνίας τριγώνου είναι θετικός αριθμός. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

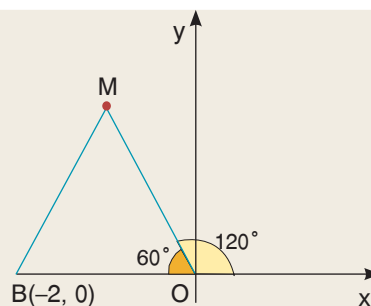
- 1 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{x\hat{O}M}$, όταν:
 α) $M(3, 4)$ β) $M(-5, 12)$ γ) $M(0, 3)$
- 2 Μια ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = -2x$.
 α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ϵ και να προσδιορίσετε την τεταγμένη ενός σημείου της M που έχει τετμημένη -1 .
 β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{x\hat{O}M}$.
- 3 Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μία κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα Ox γωνία 30° . Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



- 4 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισόπλευρο.

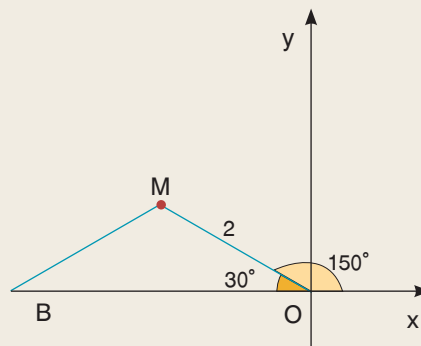
Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του M.
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 120° .



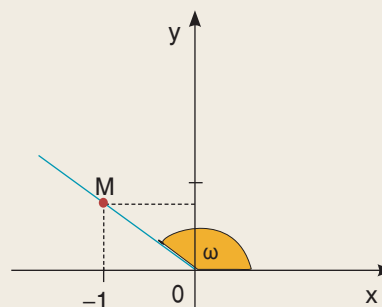
- 5 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισοσκελές.

- α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του M είναι $(-\sqrt{3}, 1)$.
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 150° .



- 6 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου M είναι -1 , τότε να υπολογίσετε:

- α) την τεταγμένη του σημείου M.
β) το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$.



- 7 Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται στη θέση O και έχει στρέψει την κάννη στο στόχο Σ_1 . Αν ο στόχος Σ_1 μετακινηθεί στη θέση Σ_2 , τότε να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στραφεί η κάννη του πυροβόλου όπλου για να σημαδεύει το στόχο στη νέα του θέση; (Να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικούς πίνακες).

