Ασκήσεις : εύκολη : μέτρια : δύσκολη

1| Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$$
$$B = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 + 101$$
$$\Gamma = 2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 98 + 101$$

2| Να δειχθούν οι ταυτότητες

A $(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

B $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

Γ $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

Δ Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

E $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+\alpha\beta\gamma$

ΣΤ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ (Euler)

3| Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

$$A = x^4 - 7x^2 + 9$$
$$B = x^4 + 4$$
$$\Gamma = x^5 + x + 1$$
$$\Delta = (x-y)^3 + (y-w)^3 + (w-x)^3$$
$$E = (x+y-2w)^3 + (x-2y+w)^3 - (2x-y-w)^3$$

4| Αν $x - \frac{3}{x} = 6$ τότε να υπολογιστούν οι παραστάσεις

$A = x^2 + \frac{9}{x^2}$ $\quad B = x^3 - \frac{27}{x^3}$ $\quad \Gamma = x^4 + \frac{81}{x^4}$

Υπόδειξη: θα φανούν χρήσιμες οι ταυτότητες

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$
$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^3 - 3SP$$
$$\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2-2P)^2 - 2P^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$$

όπου $S = \alpha+\beta$ το άθροισμα και $P = \alpha\cdot\beta$ το γινόμενο.

5 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

$A = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 - \gamma\alpha^2$

$B = \alpha^3\beta + \beta^3\gamma + \gamma^3\alpha - \alpha\beta^3 - \beta\gamma^3 - \gamma\alpha^3$

$\Gamma = \alpha^4\beta + \beta^4\gamma + \gamma^4\alpha - \alpha\beta^4 - \beta\gamma^4 - \gamma\alpha^4$

$\Delta = \alpha^3\beta^2 + \beta^3\gamma^2 + \gamma^3\alpha^2 - \alpha^2\beta^3 - \beta^2\gamma^3 - \gamma^2\alpha^3$

6 Να λυθούν στο σύνολο των θετικών ακεραίων οι εξισώσεις

A $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

B $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$

Γ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{w} = 1$

7 Αν α, β, γ μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, τότε να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

8 Δίνονται οι αριθμοί 2,3,4,5,....,100 καθώς επίσης και οι αριθμοί που προκύπτουν, αν θεωρήσουμε τα γινόμενα των αριθμών αυτών ανά 2, ανά 3, ανά 4,.... ανά 99. Να βρεθεί το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των αριθμών αυτών.

Για παράδειγμα με τους αριθμούς 2,3,4,5 έχουμε

γινόμενα ανά δύο $2\cdot3,\ 2\cdot4,\ 2\cdot5,\ 3\cdot4,\ 3\cdot5,\ 4\cdot5$

γινόμενα ανά τρία $2\cdot3\cdot4,\ 2\cdot3\cdot5,\ 2\cdot4\cdot5,\ 3\cdot4\cdot5$

γινόμενα ανά τέσσερα $2\cdot3\cdot4\cdot5$

και σε αυτήν την περίπτωση ζητάμε το άθροισμα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120}.$$

Γενικεύστε.