

1) Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c , έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ Θαλής Α' Λυκ. 2023.

2) Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, γ έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{2a}{b}, \frac{b}{\gamma}, \frac{\gamma}{a}$ να είναι θετικοί ακέραιοι. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+\gamma) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\gamma})$. ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

3) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b, γ ώστε οι ποσότητες $a-1, b-2, 3-\gamma$ να είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Επιπλέον ισχύει: $a+b-\gamma=0$. Να βρεθούν οι a, b, γ .

4) Δίνονται οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, γ ώστε οι ποσότητες $ab, b\gamma, \gamma a$ να είναι τετράγωνα ακέραιων με $ab+b\gamma+\gamma a=1$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=(a+b+\gamma) \cdot (a^2+b^2+\gamma^2)$.

5) Να βρεθούν οι ακέραιοι a, b, γ σε καθεμία από τις περιπτώσεις: α) $a^2+b^2+\gamma^2=3$, β) $a^2+b^2+\gamma^2=5$
γ) $a^2+b^2+\gamma^2=4$

6) Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y, z με $x^2+4y^2+9z^2-4x-4y+12z+6=0$ Θαλής Α' Λυκ. 2017

7) Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y, z με $x^2+y^2+25z^2-2x-6y-10z+6=0$

8) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z σε καθεμία περίπτωση:

α) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 9 = 0$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

β) $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4 = 0$

γ) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz + (z-2)^2 = 0$

δ) $2x^2 + 4y^2 - 4xy + xz + z^2 = 0$

ε) $(x^2 - 4x + 5) \cdot (y^2 + 2y + 11) = 10$

στ) $(2^{x^2 - 2x + 2} + 5) \cdot (3^{y^2 - 4y + 6} + 1) = 70$

9) Να λύσετε στο σύνολο των θετικών ακεραίων τις εξισώσεις

α) $(x+y+z) \cdot (x+y) = 21$

β) $x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x-y)$ με $x > y$

γ) $xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 2 = 1996$ με $x < y < z$

10) Να λύσετε στο σύνολο των ακεραίων, τα συστήματα

α) $\begin{cases} xy^2 = 18 \\ yz^2 = 75 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + \omega y = 21 \\ \omega x + y = 18 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^3 - 4xy^2 = 8y^3 - 2x^2y \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

11) Αν τα συστήματα:

$\Sigma_1 \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$ και $\Sigma_2 \begin{cases} ax + by = 4 \\ 2ax + 3by = -8 \end{cases}$. Θελής 2013

έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε τα a, b

12) Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί με

$z = 2(x+y)$ και $z = 3(x-y)$, τότε

α) να δείξετε ότι $y < x < z$

β) να βρείτε την τριάδα (x, y, z) με $x^2 + y^2 + z^2 = 680$