1. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$. Θαλής 2012

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20. Θαλής 2012

3. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. Θαλής 2018

4. Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: Θαλής 2014

$$\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-(4\cdot 2014)^2}$$

5. Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο. 2014

6. Να βρεθεί θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$, $\nu\geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8. 2016 ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΒΛΑΧΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ

7. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο 2016
$\mathrm{A}=2017\cdot 2016\cdot 2015\cdot 2013\cdot 2012\cdot 2011$, να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

8. Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9. 2017 ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΒΛΑΧΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ

9. Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών; Θαλής 2017

10. Να βρεθούν οι ακέραιοι x,y που είναι λύσεις της εξίσωσης $x+y+x^2+y^2=p$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος. Θαλής 2015

11. Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z ισχύει ότι: $z=2(x+y)$ και $z=3(x-y)$.

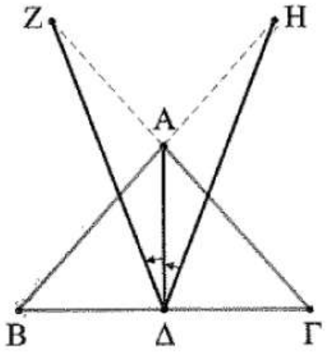
(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$. Θαλής 2013

(β) Να βρείτε την τριάδα (x,y,z) για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

12. Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

13 Να εξεταστεί αν έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων η εξίσωση
$\alpha^2+b^2=1234567$

33.50 Στο διπλανό σχήμα, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία Ζ και Η ανήκουν στις προεκτάσεις των ΓΑ και ΒΑ αντίστοιχα και ισχύ-



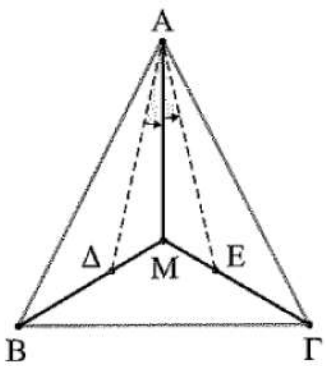
$ΔΖ = ΔΗ$ και

$\widehat{ΑΔΖ} = \widehat{ΑΔΗ}$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

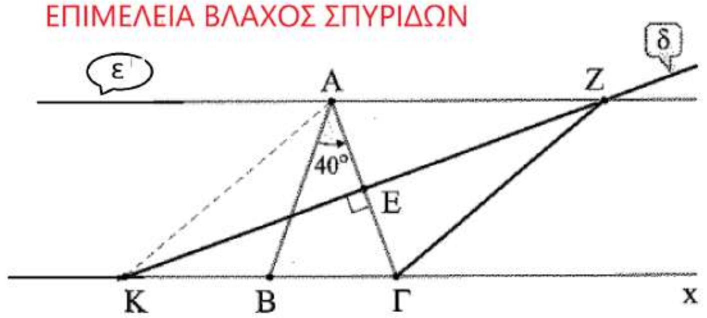
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

33.51 Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο, ώστε ΜΒ= ΜΓ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΕ$ και $\widehat{ΜΑΔ} = \widehat{ΜΑΕ}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



33.52 Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\widehat{ΒΑΓ} = 40°$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΒΛΑΧΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ΖΓx}$.

β) Να αποδείξετε ότι $ΚΑ = ΑΖ$.

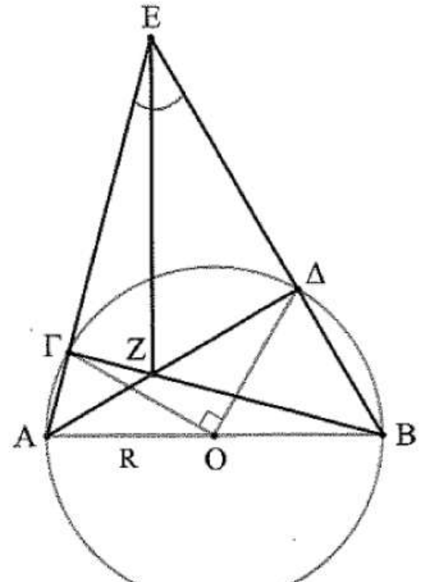
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $ΑΕ = ΑΔ$. Φέρνουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσο του τμήματος ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΖ = ΕΓ$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

33.53 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $ΑΒ = 2R$ και η γωνία $\widehat{ΓΟΔ} = 90°$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΒΛΑΧΟΣ ΣΠΥΡΙΔΩΝ



Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\widehat{ΓΑΔ}$ και $\widehat{ΓΒΔ}$.

β) Να αποδείξετε ότι $ΕΖ = 2R$.

33.54 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με:

$$ΑΒ = ΑΓ \quad \text{και} \quad \widehat{Α} = 72°$$

Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς τη ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή του κύκλου που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.