

Εγγραψίμα τετράπλευρα... και όχι μόνο.

- 1) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ ($AB=AG$) και οι διχοτόμοι των $BA, \Gamma E$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι εγγραψίμο και ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.
- 2) Να ξαναλύετε το πρόβλημα (1), αν $BA, \Gamma E$ ύψη.
- 3) Να ξαναλύετε το πρόβλημα (1), αν $BA, \Gamma E$ διάμεσοι.
- 4) Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και οι διάμεσοί του $BA, \Gamma E$ που τέμνουν στο Θ . Αν $\Theta B = \Theta \Gamma$, να δείξετε ότι το $\hat{A}B\Gamma$ είναι ισοσκελές. [Υπόδειξη: να φέρετε την $A\Theta$, που τέμνει την $B\Gamma$ στο Z].
- 5) Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και τα ύψη του $BA, \Gamma E$ που τέμνονται στο Θ . Αν $\Theta B = \Theta \Gamma$, να δείξετε ότι το $\hat{A}B\Gamma$ είναι ισοσκελές. [Υπόδειξη: αφού $\Theta B = \Theta \Gamma \Rightarrow \hat{\Theta B\Gamma} = \hat{\Theta \Gamma B}$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\hat{B\Delta\Gamma}, \hat{\Gamma E\beta} \dots$]
- 6) Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και οι διχοτόμοι των $BA, \Gamma E$. Αν η ευθεία ΔE είναι παράλληλη στην $B\Gamma$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και το $\hat{A}B\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο. [Υπόδειξη: να δείξετε ότι $BE = ED$ και ότι $\Delta\Gamma = ED$].
- 7) Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και τα ύψη των $BA, \Gamma E$. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$, να δείξετε ότι: το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι εγγραψίμο, οι γωνίες $\hat{A\beta\Gamma}$ και $\hat{\epsilon\Gamma B}$ είναι ίσες και το τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- 8) Δίνεται το τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και οι διχοτόμοι του $BA, \Gamma E$ τέμνουν στο Θ . Αν η $A\Theta$ τέμνει κάθετα την $B\Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- 9) Δίνεται τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ και οι διχοτόμοι του $BA, \Gamma E$. Αν οι γωνίες $\hat{B\epsilon\Gamma}$ και $\hat{B\Delta\Gamma}$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι το $\hat{A}B\Gamma$ είναι ισοσκελές. [Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές· ονομάστε όλες τις γωνίες να δημιουργούνται στο τετράπλευρο αυτό, από τις διαγωνίους του. Δημιουργείτε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°].

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

10) Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και εξωτερικά του τριγώνου, εκηφατισθεί τα τετράγωνα $ABDE$ και $AFZH$. Να δείξετε ότι ο φορέας της διαμέτρου AM του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, τέμνει κάθετα την EH .

11) Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και εσωτ. αυτού τα ισοπλευρά τρίγωνα $\triangle A_1B\Gamma$, $\triangle B_1A\Gamma$, $\triangle \Gamma_1AB$. Ναδειχθεί ότι οι ευθείες A_1A , B_1B , $\Gamma_1\Gamma$ συντρέχουν. Δηλαδή διέρχονται και οι τρεις από ένα σημείο S (σημείο Steiner).

12) Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και τα ύψη του BD , CE . Αν M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να δείξετε ότι $MD = ME$. [Υπόδειξη: το τετράπλευρο BDE είναι εγγράφιο. ποιά είναι η διάμετρος;]

13) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$. Είναι $AD = AB = B\Gamma$ και $\widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$. Αν K το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι παραλληλόγραφο. [Υπόδειξη: να δείξετε διαδοχικά: $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$, $BK = \frac{A\Gamma}{2}$, $B\Gamma K$ ισοπλευρό και τέλος $ABK\Delta$ παραλληλόγραφο].

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

14) Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από τα A , B φέρνουμε τις ευθείες ϵ και δ . η (ϵ) τέμνει τον C_1 στο Γ και τον C_2 στο Δ , ενώ η (δ) τέμνει τον C_1 στο Γ' και τον C_2 στο Δ' . Να δείξετε ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

15) Να αποδείξετε ότι τα ύψη AD , BE , ΓZ ενός τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου $\triangle EZZ$ (ορθό τρίγωνο).

16) Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $\widehat{AB\Gamma} = 2\widehat{B\Gamma A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ έτσι ώστε $AB = \Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle ABE$ και $\triangle \Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

(Θαλής Α' Λυκ. 2019)

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΒΛΑΧΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ