$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y+x}{xy}=1 \\ \frac{x^3+y^3}{(xy)^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{y+x}{xy}=1 \\ \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^2}=1 \end{cases}$$

Θέτω $x+y=A$
$x \cdot y = B$

$$\begin{cases} \frac{A}{B}=1 \\ \frac{A^3-3BA}{B^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ \frac{A^3-3A^2}{A^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

2η εξίσωση
$A^3-3A^2=A^2 \Leftrightarrow A^3-4A^2=0 \Leftrightarrow A^2(A-4)=0 \Leftrightarrow A=0$ ή $A=4$

Σ_1: $\begin{cases} A=B \\ A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ x \cdot y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ απορρίπτεται

Σ_2: $\begin{cases} A=B \\ A=4 \end{cases} \begin{cases} A=4 \\ B=4 \end{cases} \begin{cases} x+y=4 \\ x \cdot y=4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(2,2)$
δεκτή

Ασκ. 3 / Φυλ

$$\begin{cases} 10(a^2+b^2)=29ab \\ a+b=7 \end{cases} (\Sigma) \quad \begin{matrix} A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \\ B=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \end{matrix} \Bigg\} \text{ Σπίτι}$$

Θέλω να υπολογίσω τις παραστάσεις $S=a+b$, $P=a \cdot b$

ασκ. 4 / φυλ.

5) $\begin{cases} x^2-4x+\frac{5}{y+2}=2 \\ 3(x-2)^2-\frac{4}{y+2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2-4x+4+\frac{5}{y+2}=6 \\ 3(x-2)^2-\frac{4}{y+2}=-1 \end{matrix}$

Θυμίζω $\underbrace{x^2-4x}+4=(x-2)^2$

$$\begin{cases} (x-2)^2-5 \cdot \frac{1}{y+2}=6 \\ 3(x-2)^2-4\frac{1}{y+2}=-1 \end{cases}$$

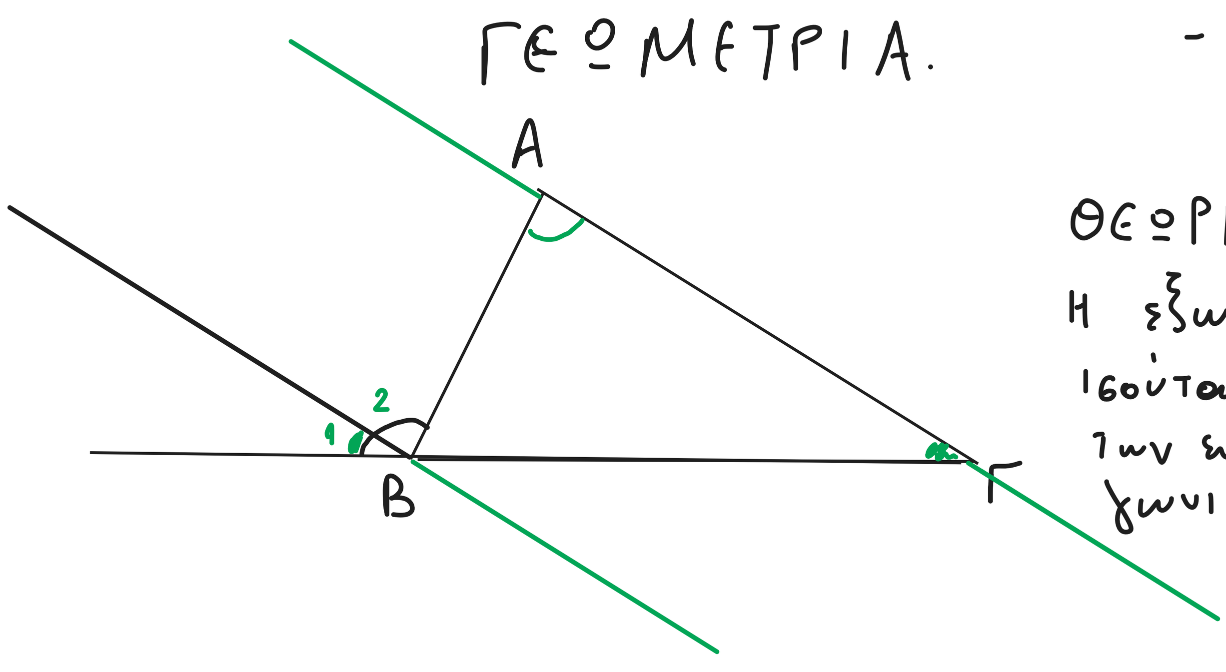
Θέτω $\boxed{\frac{1}{y+2}=A, \ (x-2)^2=B}$

$\begin{cases} B-5A=6 \\ 3B-4A=-1 \end{cases} \overset{3}{\underset{-1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 3B-15A=18 \\ -3B+4A=1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} -11A=19$

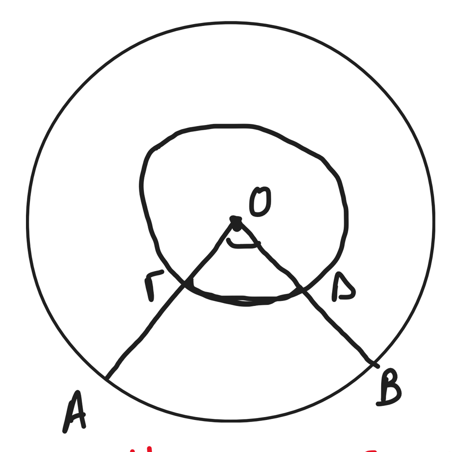
$A=-\frac{19}{11}$

$B-5\left(-\frac{19}{11}\right)=6 \Leftrightarrow B+\frac{95}{11}=6 \Leftrightarrow B=6-\frac{95}{11}=\frac{-29}{11}$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

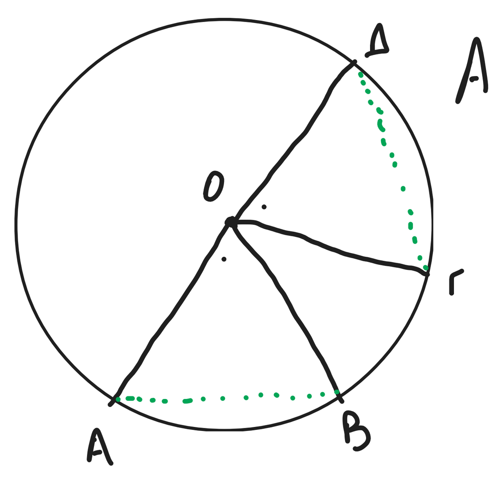


ΘΕΩΡΗΜΑ
Η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των εντός απέναντι γωνιών $\hat{B}_{εξ}=\hat{A}+\hat{\Gamma}$

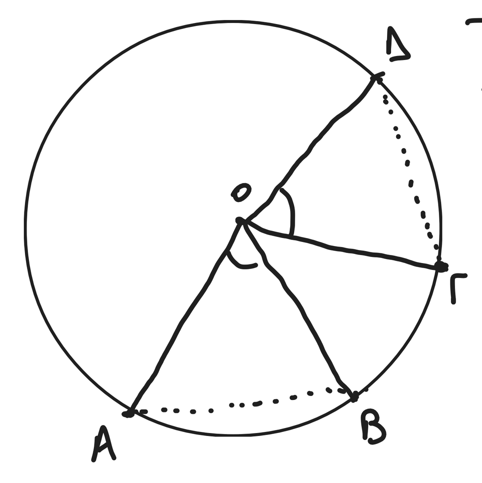


Λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Το άνοιγμα του τόξου ισούται με το άνοιγμα της επίκεντρης γωνίας
π.χ. Αν $A\hat{O}B=80^\circ \Longrightarrow \overset{\frown}{AB}=80^\circ$

Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τόξα που ανήκουν σε άνισους κύκλους
Μπορούμε να συγκρίνουμε τόξα που ανήκουν στον ίδιο (ή σε ίσους) κύκλους.

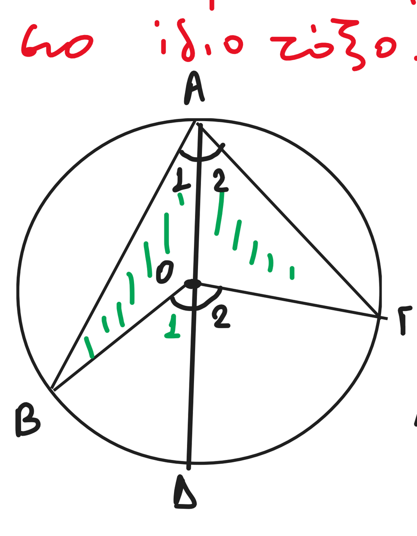


Αν $A\hat{O}B=\Gamma\hat{O}\Delta \Longrightarrow$
$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$
Επιπλέον. Αν $AB=\Gamma\Delta \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$



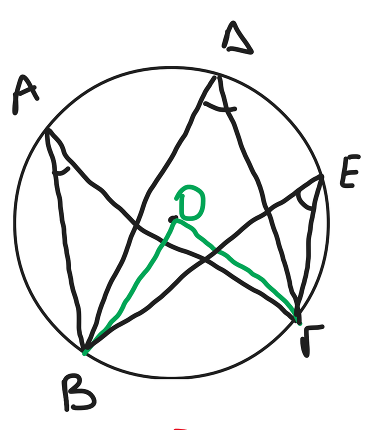
Πρόβλημα: Δίνεται το τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Να κατασκευαστεί ένα ίσο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.
Λύση: Με τον διαβήτη, αιχμή στο A μολύβι στο B.
Την αιχμή στο Γ, και ~~γράφω~~ τόξο που τέμνει τον κύκλο στο Δ
Θα πετύχω $\Gamma\Delta=AB \Longrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Longrightarrow A\hat{O}B=\Gamma\hat{O}\Delta$

Θεώρημα: Μια εγγεγραμμένη γωνία κύκλου ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.



$\hat{O}_1$ εξωτερ. του $O\overset{\triangle}{A}B \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{A}_1+\hat{B}$
όμως $O\overset{\triangle}{A}B$ ισοσκελής $\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}$
$\Bigg\} \boxed{\hat{O}_1=2\hat{A}_1}$ (1)
$\hat{O}_2$ εξωτερ. του $O\overset{\triangle}{A}\Gamma \Rightarrow \hat{O}_2=\hat{A}_2+\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{O}_2=2\hat{A}_2$ (2)
Από (1), (2) $\Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=2\hat{A}_1+2\hat{A}_2=2(\hat{A}_1+\hat{A}_2)=\hat{A}$
Άρα $\hat{O}=2\hat{A}$

Συμπεράσματα:
1) Όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες



$\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{O}$, $\hat{\Delta}=\frac{1}{2}\hat{O}$, $\hat{E}=\frac{1}{2}\hat{O}$

2) Αν το τόξο έχει άνοιγμα φ μοίρες, τότε η κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε αυτό θα έχει άνοιγμα $\frac{φ}{2}$ μοίρες
3) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο (διάμετρο) είναι ορθή