ασκ.8 / (γ)

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz+(z-2)^2=0 \Leftrightarrow$ $(\mathbb{R})$

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz+2(z-2)^2=2\cdot 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{x^2-2xy+y^2}+\underbrace{y^2-2yz+z^2}+\underbrace{z^2-2xz+x^2}+2(z-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2(z-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$x-y=0$ και $y-z=0$ και $z-x=0$ και $z-2=0$

$x=2 \qquad y=2 \qquad x=2 \qquad z=2$

$(x,y,z)=(2,2,2)$.

ασκ.8 (δ): (Υπόδειξη)

$\to 2x^2+4y^2-4xy+xz+z^2=0$ (Επί 2)

$4x^2+8y^2-8xy+2xz+2z^2=2\cdot 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{z^2+2xz+x^2}+3x^2+8y^2-8xy \qquad +z^2=0 \Leftrightarrow$

$(z+x)^2+(2y)^2-2\cdot(2y)\cdot(2x)+4x^2-x^2 \quad +4y^2+z^2=0$ $\{8xy\}$

$(z+x)^2+(2y-2x)^2-x^2+4y^2+z^2=0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ $\to$ η μέθοδος δεν τελεσφορεί.

Ξανά από την αρχή

$2x^2+4y^2-4xy+xz+z^2=0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{x^2-2\cdot x(2y)+(2y)^2} \quad z^2+zx+x^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-2y)^2+z^2+zx+x^2=0 \Leftrightarrow$

$2(x-2y)^2+2z^2+2zx+2x^2=0\cdot 2 \Leftrightarrow$

$2(x-2y)^2+z^2+z^2+2zx+x^2+x^2=0 \Leftrightarrow$

$2(x-2y)^2+z^2+(z+x)^2+x^2=0$ ...

ασκ.8 (ε) $(x^2-4x+5)\cdot(y^2-2y+11)=10$ $\quad 1,2 \;,\; 5,10$

$x^2-4x+5=\underbrace{x^2-2\cdot x\cdot 2+4}-4+5=\underbrace{(x-2)^2}_{+}+1 \geq 1$ (1)

$y^2-2y+11=\underbrace{y^2-2\cdot y\cdot 1+1}-1+11=\underbrace{(y-1)^2}_{+}+10 \geq 10$ (2) $(\cdot)$

$[(x-2)^2+1]\cdot[(y-1)^2+10] \geq 10 \Leftrightarrow$

$(x^2-4x+5)\cdot(y^2-2y+11) \geq 10$

Το "=" στην (1) ισχύει $\Leftrightarrow (x-2)^2+1=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Το "=" στην (2) » » $\Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$

Ασκ.9 (β)

$x^3-y^3+x^2y-x\cdot y^2=49\cdot(x-y)$ $\qquad x>y \quad \mathbb{Z}_+$

$\dfrac{(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}{x-y}+\dfrac{xy(x-y)}{x-y}=\dfrac{49(x-y)}{x-y}$, αφού $x>y$

$\Rightarrow x-y>0$

$x-y\neq 0$

$x^2+xy+y^2+xy=49 \Leftrightarrow$

$x^2+2xy+y^2=49 \Leftrightarrow (x+y)^2=49 \Leftrightarrow x+y=\pm 7$

$\Leftrightarrow x+y=7 \Leftrightarrow (x,y)=(6,1),(5,2),(4,3),\underbrace{(3,4)}$

όχι διότι $x>y$

ασκ.10

β) (1) $x+wy=21$

(2) $wx+y=18$

$\overset{(+)}{\Rightarrow}$ SOS $x+wx+wy+y=39 \Leftrightarrow$

$x(1+w)+y(w+1)=39 \Leftrightarrow$

$(w+1)\cdot(x+y)=39$ $\qquad 1,3 \;,\; 13,39 \qquad \sqrt{39}=6,..$

Α) $\begin{cases} w+1=1 \\ x+y=39 \end{cases}$ Β) $\begin{cases} w+1=-1 \\ x+y=-39 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} w+1=39 \\ x+y=1 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} w+1=-39 \\ x+y=-1 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} w+1=3 \\ x+y=13 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} w+1=-3 \\ x+y=-13 \end{cases}$ ζ) $\begin{cases} w+1=13 \\ x+y=3 \end{cases}$ η) $\begin{cases} w+1=-13 \\ x+y=-3 \end{cases}$

(Α) $w+1=1 \Leftrightarrow w=0$

$x+y=39$

(1) $x+wy=21$

$\begin{cases} w=0 \\ 21+y=39 \\ x=21 \end{cases}$ $\begin{cases} w=0 \\ y=18 \\ x=21 \end{cases}$ $(x,y,w)=(21,18,0)$