1. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$. Θαλής 2012

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ $\quad S=\alpha+\beta,\ P=\alpha\beta$

$$K(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-[(\alpha^2-\beta^2)+\beta(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-2\beta)]}{(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)+\beta\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=$$

$$=\frac{\cancel{(\alpha+\beta)}[\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-(\alpha-\beta)+\beta\cdot(\alpha-2\beta)]}{\cancel{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta-1)}=\frac{\alpha^2-\cancel{\alpha\beta}+\beta^2-\alpha+\beta+\cancel{\alpha\beta}-2\beta^2}{\alpha+\beta-1}=$$

$$=\frac{\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta-1}=\frac{(\alpha-\beta)\cancel{(\alpha+\beta-1)}}{\cancel{\alpha+\beta-1}}=\alpha-\beta.$$

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20. Θαλής 2012

Η εξίσωση είναι της μορφής $ax^2+\beta x+\gamma=0$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\lambda)^2-4\cdot1(\lambda^2-1)=4\lambda^2-4\lambda^2+4=4>0$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\lambda\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{-2\lambda\pm2}{2}=\frac{\cancel{2}(-\lambda\pm1)}{\cancel{2}}=\begin{cases}-\lambda+1\\-\lambda-1\end{cases}$

Θα πρέπει $x_1^2+x_2^2=20 \Leftrightarrow$

$(-\lambda+1)^2+(-\lambda-1)^2=20 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2=20 \Leftrightarrow$

$\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1=20 \Leftrightarrow 2\lambda^2+2=20 \Leftrightarrow 2\lambda^2=20-2 \Leftrightarrow$

$2\lambda^2=18 \Leftrightarrow \lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=\pm3$

Για $\lambda=3$: $x_1=-\lambda+1=-3+1=-2$, $x_2=-\lambda-1=-3-1=-4$

$-5<\begin{cases}-2\\-4\end{cases}<2$. Άρα $\lambda=3$ δεκτή.

Για $\lambda=-3$: $x_1=-\lambda+1=3+1=4$, $x_2=-\lambda-1=3-1=2$

η ρίζα $x_1=4$ είναι εκτός του διαστήματος $(-5,2)$

Άρα η τιμή $\lambda=-3$ απορρίπτεται.

3. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης $K=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. Θαλής 2018

$\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1 \Leftrightarrow 5\alpha^2\beta^2=\alpha^4-36\beta^4 \Leftrightarrow 36\beta^4-\alpha^4+5\alpha^2\beta^2=0$

προσπαθήσε να την φέρεις σε μορφή $(\ldots)^2+(\ldots)^2=0$

Το πολυώνυμο $36\beta^4-\alpha^4+5\alpha^2\beta^2$ είναι ομογενές 4ου βαθμού.

$36\beta^4-\alpha^4+5\alpha^2\beta^2=0$ διαιρώ με το β^4 ή με το α^4

$\frac{36\beta^4}{\beta^4}-\frac{\alpha^4}{\beta^4}+\frac{5\alpha^2\beta^2}{\beta^4}=\frac{0}{\beta^4} \Leftrightarrow 36-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4+5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=0$. Θέτω $x=\frac{\alpha}{\beta}$

η εξίσωση γίνεται: $36-x^4+5x^2=0 \Leftrightarrow -x^4+5x^2+36=0 \Leftrightarrow$

$x^4-5x^2-36=0$. Θέτω $x^2=y \Leftrightarrow x^4=y^2$

$y^2-5y-36=0 \Leftrightarrow y_{1,2}=\begin{cases}9\\-4\end{cases}$ ή $x^2=9$ ή $x^2=-4$ αδύνατο

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=3 \Leftrightarrow \alpha=3\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=-3 \Leftrightarrow \alpha=-3\beta$

$K=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\frac{2\beta}{4\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Αν $\alpha=-3\beta \Leftrightarrow K=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\frac{-4\beta}{-2\beta}=2$

Δείτε ίσως ακόμα ένα ομογενές πολυώνυμο.

Πρόβλημα: Δίνονται οι μεταβλητές x,y και ικανοποιούν την εξίσωση $x^6-2x^3y^3+3x^2y^4+y^6=0$. Διαιρώ με y^6

$\left(\frac{x}{y}\right)^6-\frac{2x^3y^3}{y^6}+\frac{3x^2y^4}{y^6}+\frac{y^6}{y^6}=\frac{0}{y^6} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{x}{y}\right)^6-2\frac{x^3}{y^3}+3\frac{x^2}{y^2}+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^6-2\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=0$

Θέτω $\frac{x}{y}=A$. $A^6-2A^3+3A^2+1=0$ ...

$A=-1$: $x\cdot x\cdot\frac{x}{y}=-1 \Leftrightarrow x=-y$

4. Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: Θαλής 2014

$$\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot2014\cdot(2014^2+3)(5\cdot2014^2+1)}{(5\cdot2014^2+1)^2-(4\cdot2014)^2}$$

ονομάζω $x=2014 \Leftrightarrow 2015=x+1$, $2013=x-1$, $2012=x-2$, $2016=x+2$

$2\cdot x=4028 \Leftrightarrow 4029=2x+1$, $4027=2x-1$

$A=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^2+4x^2+4x+1}=\frac{2x^3+6x}{5x^2+4x+1}$.

Δοκιμάζω απλοποίηση: $A=\frac{2x(x^2+3)}{}$

Για να παραγοντοποιήσουν ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο (όταν έχει συντελεστή ο x^2) βρίσκω διακρίνουσα $\Delta=4^2-4\cdot5\cdot1=16-20=-4<0$ δεν παραγοντοποιείται

Τύπος παραγοντοποίησης τριωνύμου

$ax^2+\beta x+\gamma=\alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$2x^2-5x+2=2\cdot(x-2)\cdot(x-\frac{1}{2})=(x-2)(2x-1)$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$, $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{5\pm3}{4}=\begin{cases}\frac{8}{4}=2\\\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$

- Μα λύση με εξίσωση: $2x^2-5x+2=0$ .... $x_{1,2}=\begin{cases}2\\1/2\end{cases}$
- Να παραγοντοποιήσεις το πολυώνυμο $2x^2-5x+2=2(x-2)(x-\frac{1}{2})$ ή $(x-2)(2x-1)$. Δεν βγάζω.

Συνεχίζουμε με την εξίσωση – θέλει κόπο Θαλής 2014

$B=\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+8+x^3-3x^2+3x-8-18x}{x^2+4x^2-4x+1}=$

$=\frac{2x^3+24x-18x}{5x^2-4x+1}=\frac{2x^3+6x}{5x^2-4x+1}$

$\Gamma=\frac{4x\cdot(x^2+3)\cdot(5x^2+1)}{(5x^2+1)^2-(4x)^2}=\frac{4x(5x^4+x^2+15x^2+3)}{(5x^2+1-4x)(5x^2+1+4x)}=$

$\frac{4x(5x^4+16x^2+3)}{\ldots}=\frac{5x^5+16x^3+12x}{\ldots}$

$A+B+\Gamma=$

$\frac{2x^3+6x}{5x^2+4x+1}+\frac{2x^3+6x}{5x^2-4x+1}+\frac{5x^5+16x^3+12x}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)}=$ Ε.Κ.Π.

$\frac{(5x^2-4x+1)(2x^3+6x)+(5x^2+4x+1)(2x^3+6x)+5x^5+16x^3+12x}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)}=$

$\frac{(2x^3+6x)(5x^2-4x+1+5x^2+4x+1)+5x^5+16x^3+12x}{\Gamma(x)}=$

$\frac{(2x^3+6x)(10x^2+2)+5x^5+16x^3+12x}{\Gamma(x)}=$

$\frac{2x(x^2+3)\cdot2(5x^2+1)+4x(x^2+3)(5x^2+1)}{\Gamma(x)}=$

$\frac{(x^2+3)(5x^2+1)\cdot(4x+4x)}{\Gamma(x)}=\frac{(x^2+3)\cdot(5x^2+1)\cdot8x}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)}=$

$\frac{\ldots\ldots}{[(5x^2+1)+4x]\cdot[(5x^2+1)-4x]}=\frac{\ldots}{(5x^2+1)^2-(4x)^2}$