

αβμ.13 $a^2 + b^2 = 1234567$. $a, b \in \mathbb{Z}$.

1) a άρτος, b άρτος $2) a$ περιττός, b περιττός $3) a$ άρτος, b περιττός

$a = 2k, b = 2\lambda$
 $a^2 = 4k^2, b^2 = 4\lambda^2$
 $a^2 + b^2 = 4(k^2 + \lambda^2)$
 όπως 1234567 άρτ. νοδ. 4 άρτονο

$a = 2k+1, b = 2\lambda+1$
 $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 $b^2 = (2\lambda+1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$
 $a^2 + b^2 = 4(k^2 + \lambda^2 + k + \lambda) + 2$
 όπως 1234567 περιττός άρτονο

$a = 2k, b = 2\lambda+1$
 $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 4p$
 $b^2 = (2\lambda+1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 4q + 1$
 $a^2 + b^2 = 4p + 4q + 1 = 4(p+q) + 1$
 όπως αν κάινω να διαιρέσω 1234567 με 4 θα βρω το υπόλοιπο 3.

67 | 4
 27 | 16
 3

δμλ. $1234567 = 4 \cdot 311141 + 3$

Για να βρω το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός ακεραίου με το 4, αρκεί να βρω το υπόλοιπο της διαίρεσης των τελευταίων δύο ψηφίων τμήματος του με το 4.

π.χ. θέλω να βρω το $v[573891 : 8]$

891 | 8
 09 | 111
 11

573891 | 8
 13 | 71736
 58
 29
 51

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακεραίοι x, y με $x^2 + y^2 + x + y = 2025$. $\Leftrightarrow \underbrace{x(x+1)}_{\text{νοδ.2}} + \underbrace{y(y+1)}_{\text{νοδ.2}} = 2025$ περιττός.

αβμ.11) φλλ. $x, y, z \in \mathbb{R}$, θετικοί
 $z = 2(x+y), z = 3(x-y)$. Ν.δ.ο. $y < x < z$

α) $2(x+y) = 3(x-y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow 2y + 3y = 3x - 2x \Leftrightarrow 5y = x$. Αφού $y > 0 \Rightarrow 5y > y \Rightarrow x > y$

$z = 2(5y + y) = 2 \cdot 6y = 12y > 5y = x \Rightarrow z > x$

β) $x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow (5y)^2 + y^2 + (12y)^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = \frac{68}{17} = 4 \Rightarrow y = 2$

Αφού $y = 2$. $x = 5y = 10, z = 12y = 24$.

Αβμ.8) 999999 π.χ. 2, 7, 4, 8, 6, 7, 8, 9

Διαιρείται με το 5 $\Leftrightarrow$ τελευταίο ψηφίο είναι ο ή 5 Άρτονο.

Διαιρείται με το 9 $\Leftrightarrow$ άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9. Άρτονο άρα υπάρχει ψηφίο 4.

Διαιρείται με το 3 $\Leftrightarrow$ άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3. αν προβέσω ότι τα 9-άρια $\rightarrow$ διαιρούνται με το 3, όταν προβέσω 4 δεν διαιρείται με το 3.

$6 = 2 \cdot 3$ και ο αριθμός δεν διαιρείται με το 3 $\Rightarrow$ ούτε με το 6.

Με το 4? Το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα είναι το 94, 49, 99. κανένα δεν διαιρείται με το 4.

Μπορώ να τον "κατασκευάσω" με τελευταίο ψηφίο 4, τότε θα διαιρείται με το 2.

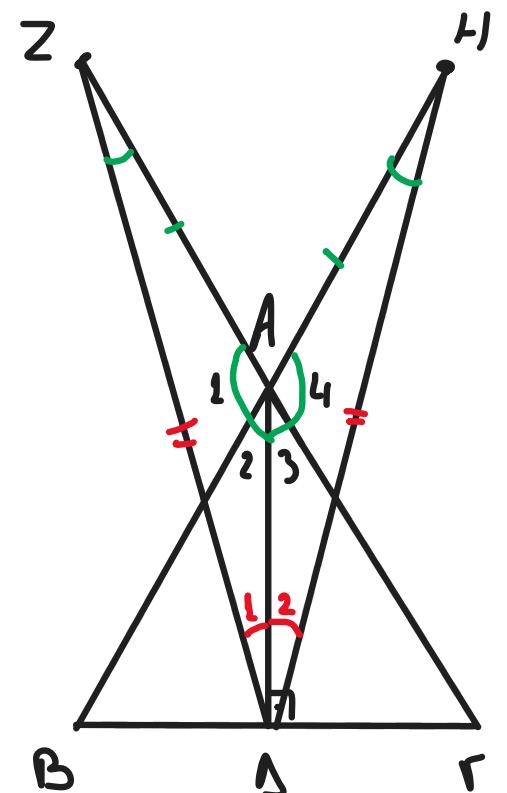
94 | 7
 24 | 13
 3

994 | 7
 29 | 142
 14

Αρα ο ελάχιστος αριθμός που διαιρείται με 2, και το 7 είναι ο 994.

Γεωμετρία:

33.50



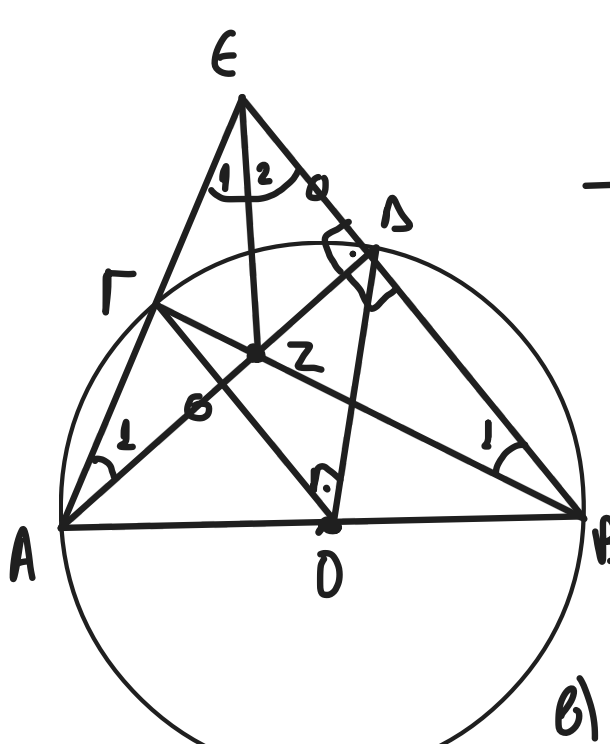
$z \rightarrow \Gamma A$ προς το έρος του A
 $h \rightarrow B A$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

$y \mid \begin{matrix} \hat{A}Z = \hat{A}H \\ \hat{A}Z = \hat{A}H \\ \hat{A}B = \hat{A}\Gamma \end{matrix}$

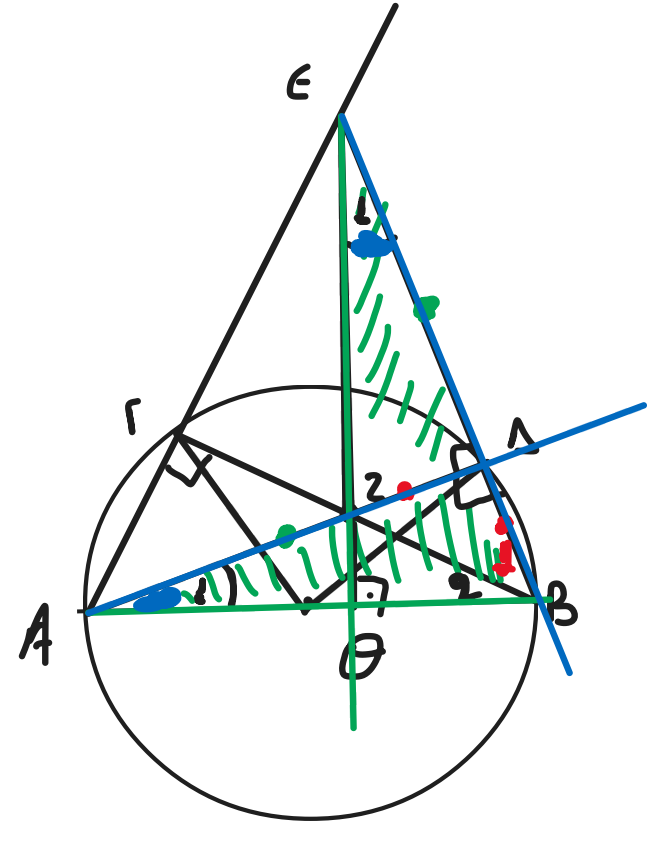
Τι άλλο μπορώ να δείξω
 α) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
 β) Το $\hat{A}D$ διττός
 γ) Το $\hat{A}D$ διχοτόμος

Συγκρίνω τα τρίγωνα
 $\hat{A}DZ, \hat{A}DH \rightarrow \hat{A}_{12} = \hat{A}_{34}$
 ...
 Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_n$ (κατασκευάζω)

$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_3 \Rightarrow AD$ διχοτόμος των τριγώνων $AB\Gamma$. Επειδή AD ύψος $\rightarrow$...



$y \mid \begin{matrix} \hat{\Gamma}O\Delta = 90^\circ \\ \hat{A}_1 = 45^\circ = \hat{B}_1 \\ AD = DE \end{matrix}$



β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $EZ\Delta, AB\Delta$.

Μπορώ να δ.ο. $\hat{E}_1 = \hat{A}_1$

Στο $AB\Delta$: AD ύψος, BE ύψος. Τότε EZ (αν την προεκτείνω) δίνεται ύψος.

Στο $E\theta B$ ορθογώνιο $\Rightarrow \hat{E}_1, \hat{B}_{12}$ συμπληρωματικές. $\rightarrow \hat{E}_1 = \hat{A}_1$

Στο $AB\Delta \Rightarrow \hat{A}_1, \hat{B}_{12} \Rightarrow$