

Δίνεται το πολώνυμο $A(x) = x^3 - 2x - k$.

Και ο αριθμός $a = \sqrt[3]{\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{2^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{2^3}{27}}}$. Θα δ.ο. $A(a) = 0$

Ανάλυση: $A(a) = a^3 - 2a - k = (x+y)^3 - 2(x+y) - k =$
 $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 2(x+y) - k = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) - 2(x+y) - k =$
 $x^3 + y^3 + 3xya - 2a - k$. Άρα $A(a) = x^3 + y^3 + 3xya - 2a - k$. (1)
 $x \cdot y = \sqrt[3]{\frac{k}{2} + \sqrt{D}} \cdot \sqrt[3]{\frac{k}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{(\frac{k}{2} + \sqrt{D})(\frac{k}{2} - \sqrt{D})} = \sqrt[3]{\frac{k^2}{4} - D} = \sqrt[3]{\frac{k^2}{4} - (\frac{k^2}{4} - \frac{2^3}{27})} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{27}} = \frac{2}{3}$
 Από (1) $\Rightarrow A(a) = \frac{k}{2} + \sqrt{D} + \frac{k}{2} - \sqrt{D} + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot a - 2a - k = k + 2a - 2a - k = 0$

Η επιλογή της β' βαθμίας εξίσωσης με τη μέθοδο
 συμπαράγωγης τετραγώνων.

Παρά.1) Να λύσει η εξίσωση:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \quad (x-3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x-3 = 1 \quad \vee \quad x-3 = -1$$

$$x=4$$

$$x=2$$

Παρά.2) Η εξίσωση: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{16}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$$

$$x=4$$

$$x=1$$

Παρά.3) Εξίσωση $6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{25}{144} + \frac{24}{144} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144} - \frac{24}{144} \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{144} \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{144} \Leftrightarrow x - \frac{5}{12} = \frac{1}{12} \quad \vee \quad x - \frac{5}{12} = -\frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \Delta > 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Αν } \Delta < 0 \text{ τότε} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \text{αρνητικό} \\ \text{αδύνατο.} \end{array} \right.$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Αν } \Delta = 0 \text{ τότε} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \\ x = -\frac{b}{2a} \quad x = -\frac{b}{2a} \end{array} \right. \Delta$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Μια διάνυσή ρι} \end{array} \right. \Delta$$

Αν για τας πραγματικές x, y, z, w

$$x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zw) \quad (1)$$

$$\text{v.s.o. } x = 27w$$

Ανάλυση:

$$x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 - 6xy - 6yz - 6zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + y^2 - 6yz + 9z^2 + z^2 - 6zw + 9w^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3y)^2 + (y-3z)^2 + (z-3w)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-3y=0 \quad \text{και} \quad y-3z=0 \quad \text{και} \quad z-3w=0$$

$$x=3y \quad \text{και} \quad y=3z \quad \text{και} \quad z=3w$$

$$x=3 \cdot (3z) = 9z \Rightarrow x=9z=9 \cdot 3w=27w \Rightarrow x=27w \text{ ο.ε.δ.}$$

Πρώτος αριθμός ονομάζεται ο ακέραιος που έχει μοναδικούς

διαγώνους, τον εαυτό του και τη μονάδα.

Πχ. 11, 13, 17, 23, 29, ...

Το "1" δεν είναι ούτε πρώτος, ούτε σύνθετος.

- Αν $a, b \geq 0$, ακέραιοι, με $a > b$, να δ.ο. ο αριθμός

$$M = \frac{(2a+1)^2 - (2b+1)^2}{4} \text{ είναι θετικάς ακεραίος. Επίσης, να βρείτε}$$

Τις τιμές των a, b ώστε ο M να είναι πρώτος.

$$\text{Λύση} \quad M = \frac{4a^2 + 4a + 1 - 4b^2 - 4b - 1}{4} = \frac{4(a^2 + a - b^2 - b)}{4} = \frac{a^2 + a - b^2 - b}{1}$$

προφανώς ακεραίος. Αφού $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0$

επίσης $a - b > 0 \Rightarrow a^2 - b^2 + a - b > 0 \Rightarrow M > 0$, ακεραίος.

$$\text{Είναι } M = \frac{a^2 + a - b^2 - b}{1} = (a-b)(a+b) + (a-b) = (a-b)(a+b+1)$$

Για να είναι πρώτος, θα πρέπει $a-b=1 \Rightarrow a=b+1$

$$\text{Τότε } M = (a-b)(a+b+1) = 1 \cdot (b+1+b+1) = 2b+2 = 2(b+1)$$

$$\text{Θα πρέπει } b+1=1 \Leftrightarrow b=0 \Rightarrow a=0+1=1$$

2ος τρόπος: $M = a^2 + a - b^2 - b$ και αναζητώ να είναι πρώτος

$$a^2 + a = a(a+1): \text{ γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων} = \text{πολ. 2}$$

$$-b^2 - b = -b(b+1): \text{ πολ. 2}$$

Άρα $M = \text{πολ. 2}$, όμως M πρώτος. Άρα $M=2$

$$\text{Άρα } -a^2 + a - b^2 - b = 2 \Leftrightarrow a^2 + a - b^2 - b - 2 = 0.$$

Εξίσωση 2α βαθμίας ως προς a

$$A=1, B=1, \Gamma=-b^2-b-2$$

$$\Delta = B^2 - 4A\Gamma = 1 - 4(-b^2-b-2) = 1 + 4b^2 + 4b + 8 = 4b^2 + 4b + 9$$

$$\text{Οι ρίζες ως εξίσωσης } a_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-1 \pm \sqrt{4b^2 + 4b + 9}}{2}$$

Θα πρέπει $4b^2 + 4b + 9$ τετράγωνο ακεραίου.

$$4b^2 + 4b + 9 = (2b)^2 + 2 \cdot (2b) \cdot 1 + 1 + 1 + 9 = (2b+1)^2 + 8 \text{ τετράγωνο ακεραίου}$$

όμως η νοοβύληση $(2b+1)^2$ είναι τετράγωνο ακεραίου

Παρατηρώ τα τετράγωνα ακεραίων που ξέρω

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$$

Το μοναδικό ζεύγος ακεραίων με (μεταξύ τους) αινύθωρο 8 μονάδες

$$\text{είναι το } 1-9. \text{ Άρα } (2b+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$2b+1=1 \quad \vee \quad 2b+1=-1$$

$$2b=0$$

$$b=0$$

$$2b=-2$$

$$b=-1 \text{ (απορ.)}$$