

1) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παραστάδας

$A = a^2 - 10ab + 27b^2 - 8b + 8$. Για ποιές τιμές των a, b , η παράσταση A παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση $a^2 - 10ab + 27b^2 - 8b + 8 =$
 $a^2 - 2 \cdot a \cdot (5b) + 25b^2 + 2b^2 - 8b + 8 = (a - 5b)^2 + 2(b^2 - 4b + 4) =$
 $(a - 5b)^2 + 2(b - 2)^2 \geq 0.$

Η παράσταση A για να γίνει ίση με το 0, πρέπει και αρχικά

$a - 5b = 0$ $b - 2 = 0$
 $a = 5b$ $b = 2$
 $a = 10$

A παίρνει την ελάχιστη τιμή...

2) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (a+b)x^2 - 4(a+b)x + 8^2 + 4$, όπου $a, b, 8$ ακέραιοι με $a > 0, b > 0, 8 > 0$. Αν $P(1) = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $a, b, 8$.

Λύση $P(1) = 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot 1^2 - 4(a+b) \cdot 1 + 8^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $(a+b)^2 - 4(a+b) + 8^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $(a+b)^2 - 2(a+b) \cdot 2 + 4 + 8^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b-2)^2 + 8^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $a+b-2 = 0$ $8 = 0$
 $a+b = 2$
 αφού $a, b \in \mathbb{Z}$, και $a, b > 0 \Rightarrow a = b = 1$

3) Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί $a, b, 8$ για τους οποίους ισχύει

$a^2 + 2ab + a = 2b^2 + 4b + 3.$

Λύση $a(b^2 + 2b + 1) = 2b^2 + 4b + 2 + 1 \Leftrightarrow$
 $a(b^2 + 2b + 1) = 2(b^2 + 2b + 1) + 1 \Leftrightarrow a(b+1)^2 = 2(b+1)^2 + 1 \Leftrightarrow$
 $a(b+1)^2 - 2(b+1)^2 = 1 \Leftrightarrow (b+1)^2(a-2) = 1$
 όπως $(b+1)^2, a-2 \in \mathbb{Z}$ $(b+1)^2 \geq 0$ $(b+1)^2 = 1$ και $a-2 = 1$
 $b+1 = \pm 1$ $a = 3$
 $b+1 = 1 \Rightarrow b = 0$ $b+1 = -1 \Rightarrow b = -2$
 Οι λύσεις είναι
 $(a, b) = (3, 0)$ ή $(a, b) = (3, -2)$

4) Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y ($x > y$) που ικανοποιούν την ισότητα $x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x-y).$

Λύση $(x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) - 49(x-y) = 0 \Leftrightarrow$
 $(x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2 + xy - 49) = 0 \Leftrightarrow$
 $x-y = 0$ ή $x^2 + 2xy + y^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow$
 $x = y$ $(x+y)^2 - 7^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y-7)(x+y+7) = 0 \Leftrightarrow$
 Άτονο $x+y-7 = 0$ ή $x+y+7 = 0 \Leftrightarrow$
 $x+y = 7$ $xy = -7$
 $x > y$ $(x, y) = (6, 1)$ $(5, 2), (4, 3)$
 αφού η σχέση $x > 0, y > 0$

$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ $\left. \begin{array}{l} \text{Ανισότητα (των τριώνων)} \\ \text{b' τελεστή, επιμεριστικές} \end{array} \right\}$
 $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

5) Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους $a, b, 8$ με $a < b < 8$ ώστε

$ab8 + ab + a8 + b8 + a + b + 8 + 2 = 1996 \Leftrightarrow$
 $a(b8 + b + 8 + 1) + b8 + b + 8 + 1 + 1 = 1996 \Leftrightarrow$

$(b8 + b + 8 + 1)(a+1) = 1996 - 1 = 1995 \Leftrightarrow$
 $[b(8+1) + (8+1)] \cdot (a+1) = 1995 \Leftrightarrow (8+1) \cdot (b+1) \cdot (a+1) = 1995 \Leftrightarrow$
 $1995 \begin{array}{l|l} 3 & 665 \\ 19 & 665 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 5 & 133 \\ 13 & 133 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 7 & 63 \\ 63 & 19 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} (8+1)(b+1)(a+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \\ (a+1)(b+1)(8+1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \end{array} \right\}$
 $a > 0 \Rightarrow a+1 > 1$ $b > 0 \Rightarrow b+1 > 1$ $8 > 0 \Rightarrow 8+1 > 1$
 οφείτως $b+1 > 1, 8+1 > 1$ $\times 2$ $a+1 = 3, b+1 = 5, 8+1 = 7, 19$ OK
 Άτονο $a < b$ $b > 8$ Άτονο.

3) $a+1 = 3 \cdot 5, b+1 = 19, 8+1 = 7$ $\times$

4) $a+1 = 7, b+1 = 3 \cdot 5, 8+1 = 19$ OK

5) $a+1 = 5, b+1 = 19, 8+1 = 3 \cdot 7$ OK

φωλλάδω: $a64.$

$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 =$

$(100+1) + (99+2) + (98+3) + \dots = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots}_{50}$
 $= 50 \cdot 101 = 5050.$

$B = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 + 101 =$

$(1+101) + (3+99) + (5+97) + \dots = 102 + 102 + 102 + \dots = 102 \cdot 25,5$

Οι όροι των αθροισμάτων είναι περιττοί ακέραιοι.

$3 = 2 \cdot 1 + 1, 5 = 2 \cdot 2 + 1, 7 = 2 \cdot 3 + 1, 101 = 2 \cdot 50 + 1$

Το 101 είναι ο 51ος όρος.

$\rightarrow 25,5$ παρρωδέσεις.