

α64.2] A] $(a-b)^2 + (b-\gamma)^2 + (\gamma-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + \gamma^2 - ab - b\gamma - \gamma a)$

και να έχουμε και το εξάγειο:

Να δείξουμε ότι $a^2 + b^2 + \gamma^2 - ab - b\gamma - \gamma a \geq 0 \Leftrightarrow$

$$2a^2 + 2b^2 + 2\gamma^2 - 2ab - 2b\gamma - 2\gamma a \geq 2 \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2b\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma a + a^2}_{(a-b)^2 + (b-\gamma)^2 + (\gamma-a)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-b)^2 + (b-\gamma)^2 + (\gamma-a)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει}$$

B] $(a+b+\gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2(ab + b\gamma + \gamma a)$.

Αποδ.] $(a+b+\gamma)^2 = (a+b+\gamma)(a+b+\gamma) = \dots$

2ος τρόπος $(a+b+\gamma)^2 = [(a+b) + \gamma]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)\gamma + \gamma^2 =$

Γ] $(a+b+\gamma)^3 = [(a+b) + \gamma]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2\gamma + 3(a+b)\gamma^2 + \gamma^3 =$

$$a^3 + \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} + b^3 + 3(a+b)^2\gamma + 3(a+b)\gamma^2 + \gamma^3 =$$

$$a^3 + b^3 + \gamma^3 + \underline{3ab(a+b)} + \underline{3(a+b)^2\gamma} + \underline{3(a+b)\gamma^2} =$$

$$a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(a+b) \cdot [ab + (a+b)\gamma + \gamma^2] =$$

$$a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(a+b) \cdot (ab + a\gamma + b\gamma + \gamma^2) =$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \text{ " } \underline{\hspace{1cm}} \cdot [a(b+\gamma) + \gamma(b+\gamma)] =$$

$$a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(a+b) \cdot (b+\gamma) \cdot (a+\gamma)$$

Αρα ουσιαστικά $(a+b+\gamma)^3 = a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(a+b) \cdot (b+\gamma) \cdot (a+\gamma)$

Δ] $\overbrace{a+b+\gamma} = 0$

από το προηγούμενο επίμημα έχουμε:

$$a+b = -\gamma$$

$$(a+b+\gamma)^3 = a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(a+b)(b+\gamma)(\gamma+a)$$

$$b+\gamma = -a$$

$$0 = a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(a+b) \cdot (b+\gamma) \cdot (\gamma+a)$$

$$0 = a^3 + b^3 + \gamma^3 + 3(-\gamma) \cdot (-a) \cdot (-b) \Leftrightarrow$$

$$0 = a^3 + b^3 + \gamma^3 - 3ab\gamma \Leftrightarrow 3ab\gamma = a^3 + b^3 + \gamma^3 \text{ ο.ε.δ.}$$

Ε] $\overbrace{(a+b+\gamma)(ab+b\gamma+\gamma a)} = (a+b)(b+\gamma)(\gamma+a) + \underline{ab\gamma}$

α' τεύχος: $\underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2\gamma} + (b+\gamma) \cdot ab + (b+\gamma)b\gamma + (b+\gamma)a\gamma =$

$$\underline{ab\gamma} + \underline{a^2(b+\gamma)} + \underline{(b+\gamma) \cdot ab} + \underline{(b+\gamma) \cdot b\gamma} + \underline{(b+\gamma) \cdot a\gamma} =$$

$$ab\gamma + (b+\gamma) \cdot (a^2 + ab + b\gamma + a\gamma) =$$

$$ab\gamma + (b+\gamma) \cdot [a(a+b) + \gamma(b+a)] =$$

$$ab\gamma + (b+\gamma) \cdot [(a+b) \cdot (a+\gamma)] \text{ ο.ε.δ.}$$