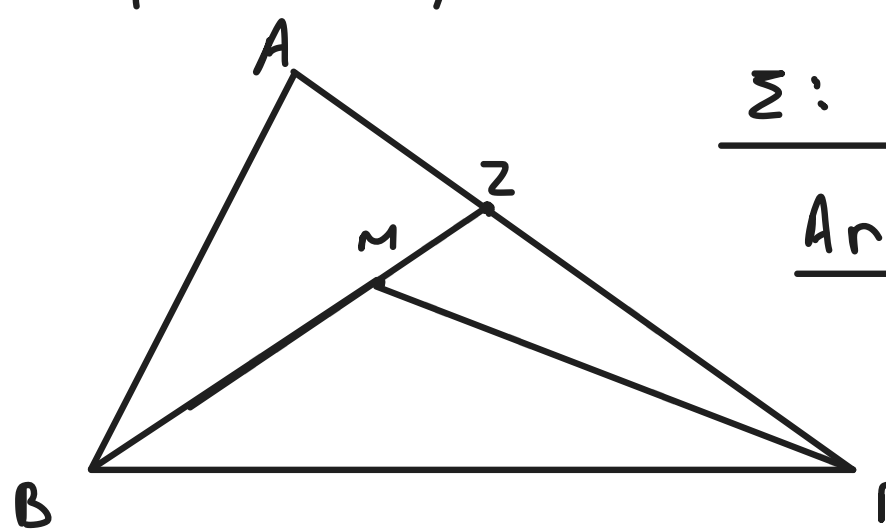


Εφαρμογή 1 / Σελ. 61 / Σχολ. βιβλίο



$$\Sigma: \overline{MB+MF} < AB+AF$$

Απόδειξη: Προεκτείνω την BM, να τέμνει την AF στο Z.

$$\triangle ABZ: BZ < AB+AZ \Rightarrow BM+MZ < AB+AZ$$

$$\text{στο } \triangle MZ: \overline{MZ} < MZ+ZF$$

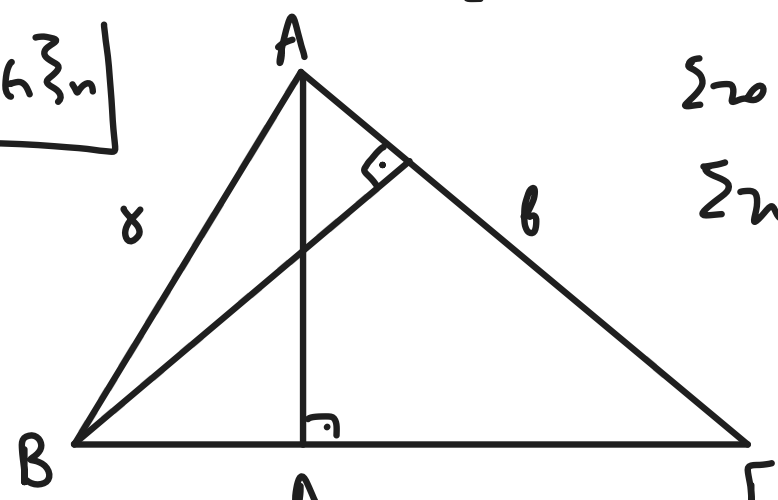
$$\overline{MB+MZ+MF} < \overline{AB+AZ+MZ} + 2F$$

$$MB+MF < AB+AZ+ZF$$

$$MB+MF < AB+AF \text{ ο.ε.δ.}$$

Άσκηση: Σε κάθε τρίγωνο $\triangle ABC$ με ύψη v_a, v_b, v_c να δείξετε ότι:
 $v_a < \frac{b+c}{2}$, $\frac{a+b+c}{2} < v_a+v_b+v_c < a+b+c$

Απόδειξη



$$\text{Στο } \triangle ABZ: \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow b > AD$$

$$\text{Στο } \triangle ABC: \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow c > AD$$

$$b+c > 2AD \Leftrightarrow$$

$$\frac{b+c}{2} > AD \Leftrightarrow$$

$$v_a < \frac{b+c}{2}$$

(b) Έχω

$$v_a < \frac{b+c}{2}$$

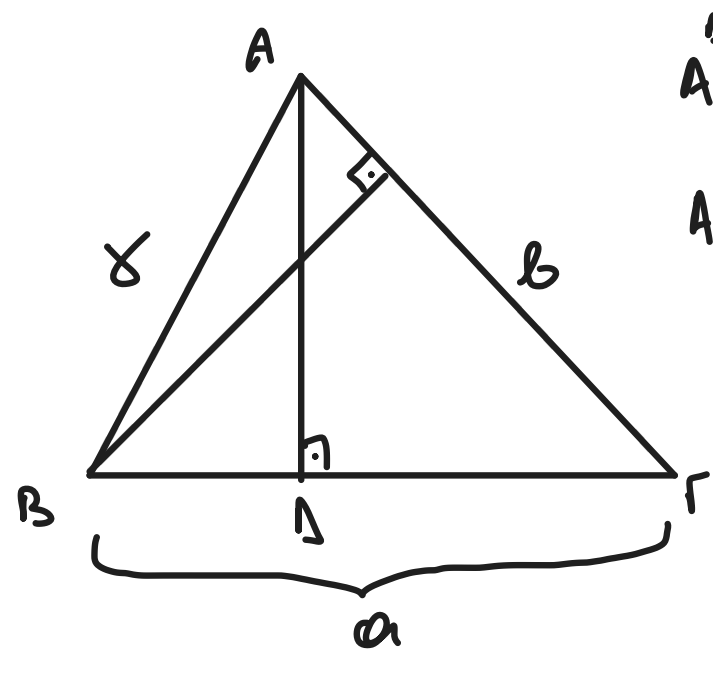
$$v_b < \frac{a+c}{2}$$

$$v_c < \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow v_a+v_b+v_c < \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow$$

$$>> >> < \frac{2b+2c+2a}{2} \Leftrightarrow$$

$$v_a+v_b+v_c < a+b+c$$



$$\triangle ABZ: AD > b-AD$$

$$\triangle ABC: AD > c-AD$$

$$2AD > b+c-(AD+AD) \Leftrightarrow$$

$$2AD > b+c-a \Leftrightarrow AD > \frac{b+c-a}{2} \Leftrightarrow$$

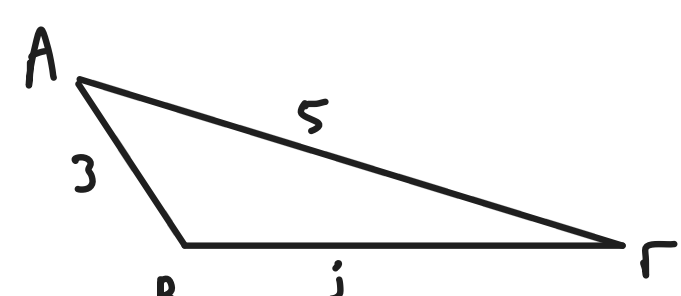
$$v_a > \frac{b+c-a}{2}$$

$$v_b > \frac{a+c-b}{2}$$

$$v_c > \frac{a+b-c}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_a > \frac{b+c-a}{2} \\ v_b > \frac{a+c-b}{2} \\ v_c > \frac{a+b-c}{2} \end{array} \right\} v_a+v_b+v_c > \frac{b+c-a}{2} + \frac{a+c-b}{2} + \frac{a+b-c}{2}$$

Άσκηση: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών ακέραιους αριθμούς $(AB)=3$, $(AC)=5$, $\hat{B}$ αλβ. $(BC)=i$



Αφού $\hat{B}$ αλβ. $\Rightarrow AC$ μεγαλύτερη πλευρά.

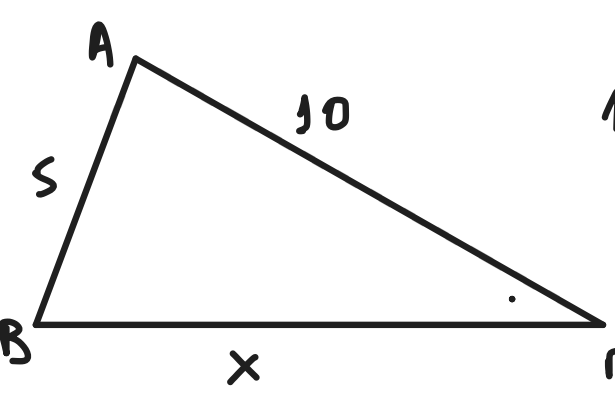
$$\text{άρα } (BC) < 5$$

$$5-3 < (BC) < 5+3 \Rightarrow (BC) > 2$$

$$\text{Αρα } \left. \begin{array}{l} 2 < (BC) < 5 \\ (BC) \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow (BC) \in \{3, 4\} \Rightarrow (BC) = 4.$$

Αφού $\triangle ABC$ ορθογώνιο

Άσκηση: Σε τρίγωνο $\triangle ABC$, η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\hat{B}$. $(AC)=10$, $(AB)=5$. Να βρείτε ποια είναι η μικρότερη πλευρά.



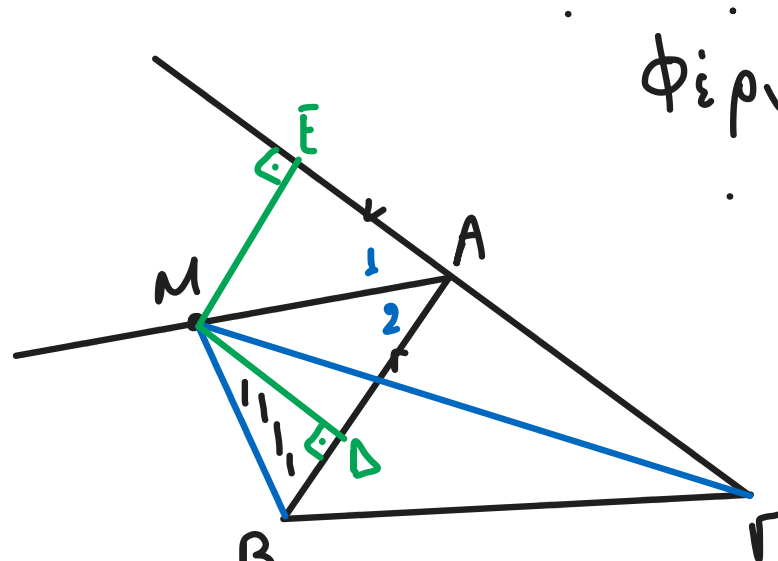
$$10-5 < x < 10+5 \Leftrightarrow$$

$$5 < x < 15 \Rightarrow x > 5$$

$$\text{Αρα αφού } BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{C} \text{ η μικρότερη των γωνιών.}$$

Άσκηση: Σε τρίγωνο $\triangle ABC$, M το κέντρο της εσωτερικής διχοτόμου της $\hat{A}$. Να δ.ο. $MB+MF > AB+AF$



Φέρνω $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Ξέρω $MD=ME$

$$\overline{MB} > \overline{MD}, \quad \overline{MB} > \overline{DB} \quad (1)$$

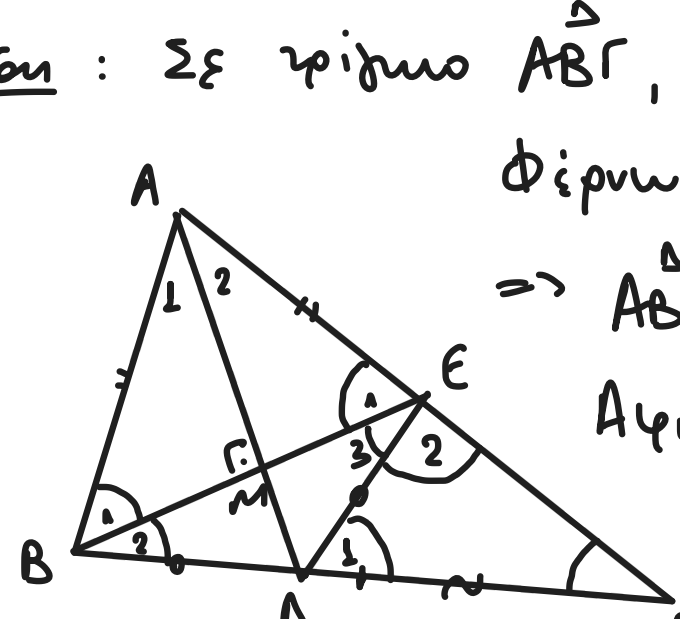
$$\bullet \overline{MF} > \overline{FE} \quad (2) \quad MF > ME$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \overline{MB+MF} > \overline{FE+DB} \Rightarrow$$

$$MB+MF > AF+AE+DB = AF+AD+DB = AF+AB \text{ ο.ε.δ.}$$

Σύμφωνα με τρίγωνο $\triangle AME$, $\triangle AMD \Rightarrow AE=AD$.

Άσκηση: Σε τρίγωνο $\triangle ABC$, $AB < AC$. Φέρνουμε τη διχοτόμο AD. Ν. δ.ο. $BD < DF$.



Φέρνω $BE \perp AD$. Είναι στο $\triangle ABE$, AM διχοτ. και ύψος

$$\Rightarrow \triangle ABE \text{ ισοσκελές } \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \text{ και } AM \parallel \text{ κ της } BE$$

$$\text{Αφού το } \Delta \text{ συνίσταται από δύο } \triangle \text{ των } BE \Rightarrow \Delta B = \Delta E.$$

$$\text{Α.ν.δ.ο. } \Delta E < \Delta F \Leftrightarrow \hat{E}_2 > \hat{F}$$



$$\hat{F} < \hat{B}_{12} \Rightarrow \hat{F} < \hat{E}_{13} \Rightarrow \hat{F} < \hat{A}_1 + \hat{F} \quad \text{oxi}$$

$$\hat{E}_{13} = \hat{F} + \hat{A}_1$$

$$\hat{F} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}_{12} \quad [60 \triangle ABF]$$

$$\hat{E}_{13} + \hat{E}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{E}_2 = 180^\circ - \hat{E}_{13} \Rightarrow \hat{E}_2 = 180^\circ - \hat{B}_{12}$$

$$\text{Από (2), (3)} \Rightarrow \hat{E}_2 > \hat{F} \Rightarrow \Delta F > \Delta E \text{ ο.ε.δ.}$$

$$\text{στο } \triangle EFG$$

Άλλα βέβαια:

1) Αν M σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου $\triangle ABC$, να δείξετε ότι $MB+MF < AB+AF$.

2) Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης να δείξετε ότι: Αν M το κέντρο της εσωτερικής διχοτόμου ενός τριγώνου $\triangle ABC$ τότε ισχύει:

$$\frac{a+b+c}{2} < MA+MB+MF < a+b+c$$

3) Στις πλευρές AB, BC, CA ενός τριγώνου $\triangle ABC$ παίρνουμε αλληλοίμως τα σημεία Δ, Ε, Ζ. Να δείξετε ότι $AE+BD+CF < \frac{3}{2}(a+b+c)$