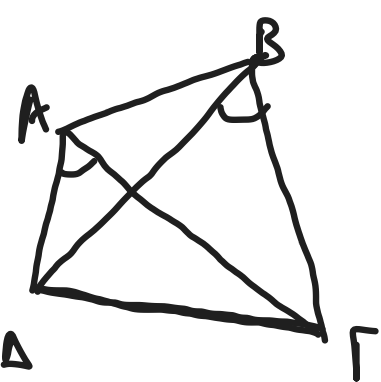
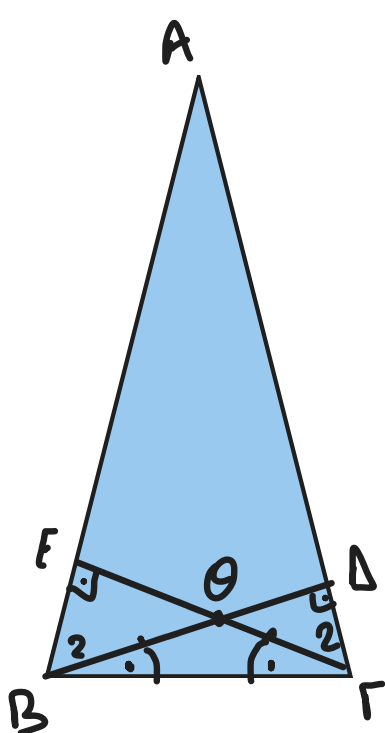


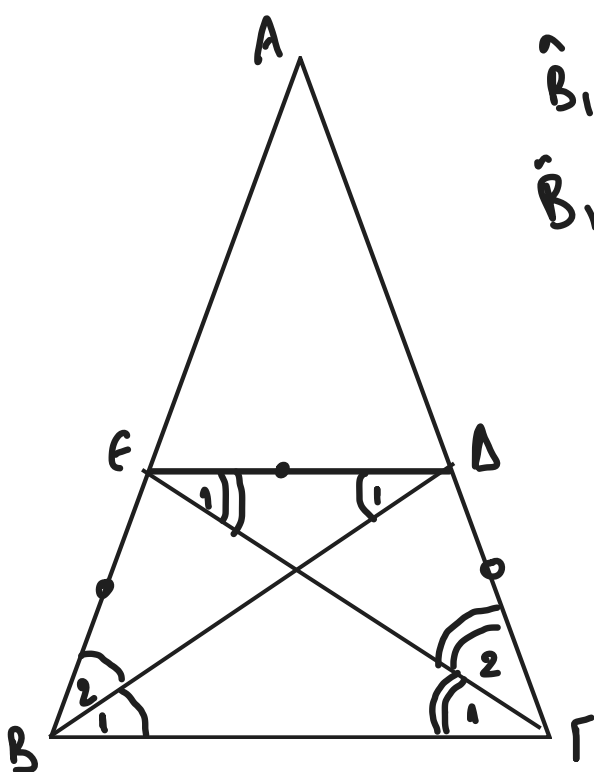


5) Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και τα ύψη του BD, CE που τέμνονται στο Θ . Αν $\Theta B = \Theta \Gamma$, να δείξετε ότι το $\triangle ABC$ είναι ισοσκελές.



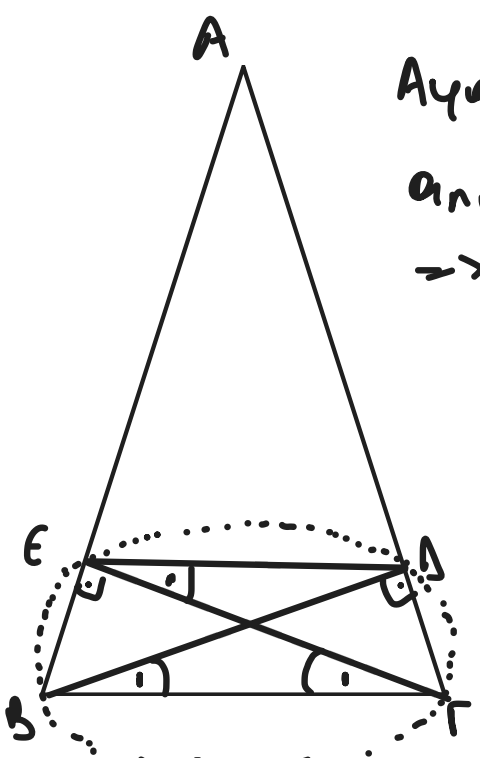
$$\begin{aligned} \triangle BDC & \triangle CEB \\ \hat{B} &= \hat{C} = 90^\circ \\ BC &= CB \\ \hat{C}_1 &= \hat{B}_1 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \triangle ABC \text{ ισοσκελές.}$$

6) Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και οι διχοτόμοι του BD, CE . Αν η ευθεία AE είναι παράλληλη στην BF , να δείξετε ότι το τετράπλευρο $BΓDE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και το $\triangle ABC$ ισοσκελές τρίγωνο. (Υπόδειξη: να δείξετε ότι $BE = ED$ και ότι $AD = ED$).



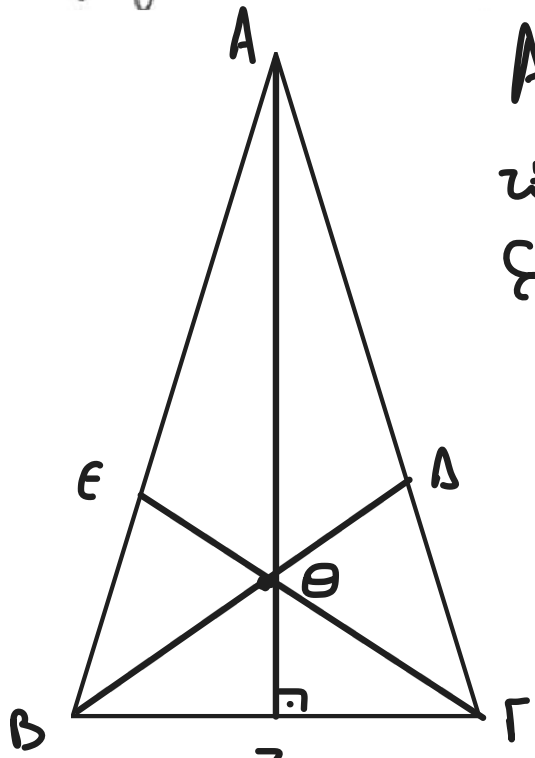
$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= \hat{D} \text{ (ε.ε. ...)} \\ \hat{B}_1 &= \hat{B}_2 \text{ (διχοτ.)} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow BE = ED \\ \text{ομοίως ... } \Gamma D = ED \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Gamma D = DE = BE \\ DE \parallel BF \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ισοσκελ. τραπέζιο.} \\ \text{Αφού } BΓDE \text{ ισοσκελ. τραπέζιο} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \text{ ο.ε.δ.} \end{array} \right\}$$

7) Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και τα ύψη του BD, CE . Αν $DE \parallel BF$, να δείξετε ότι: το τετράπλευρο $BΓDE$ είναι εγγράψιμο, οι γωνίες $\hat{A}BD$ και $\hat{E}CB$ είναι ίσες και το τρίγωνο $\triangle ABC$ είναι ισοσκελές.

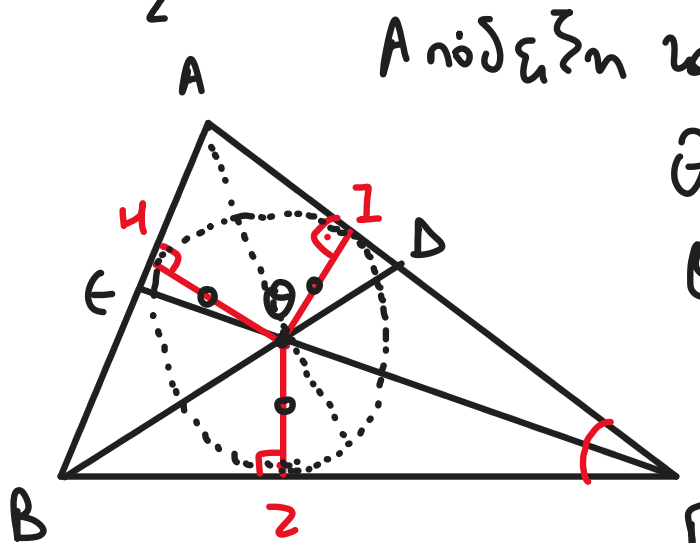


$$\begin{aligned} \text{Αφού } \hat{E} = \hat{A} = 90^\circ, \text{ η πλευρά } BF \text{ φαίνεται} \\ \text{από τις κορυφές } D, E \text{ υπό ίσες γωνίες} \\ \Rightarrow BΓDE \text{ εγγράψιμο.} \\ \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \text{ (εγγράψιμο τετράπλευρο)} \\ \hat{E}_1 = \hat{F}_1 \text{ (εναλλάξ)} \\ \hat{B}_1 = \hat{F}_1 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{F}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

8) Δίνεται το τρίγωνο $\triangle ABC$ και οι διχοτόμοι του BD, CE τέμνονται στο Θ . Αν η $A\Theta$ τέμνει κάθετα την BC , να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle ABC$ είναι ισοσκελές.

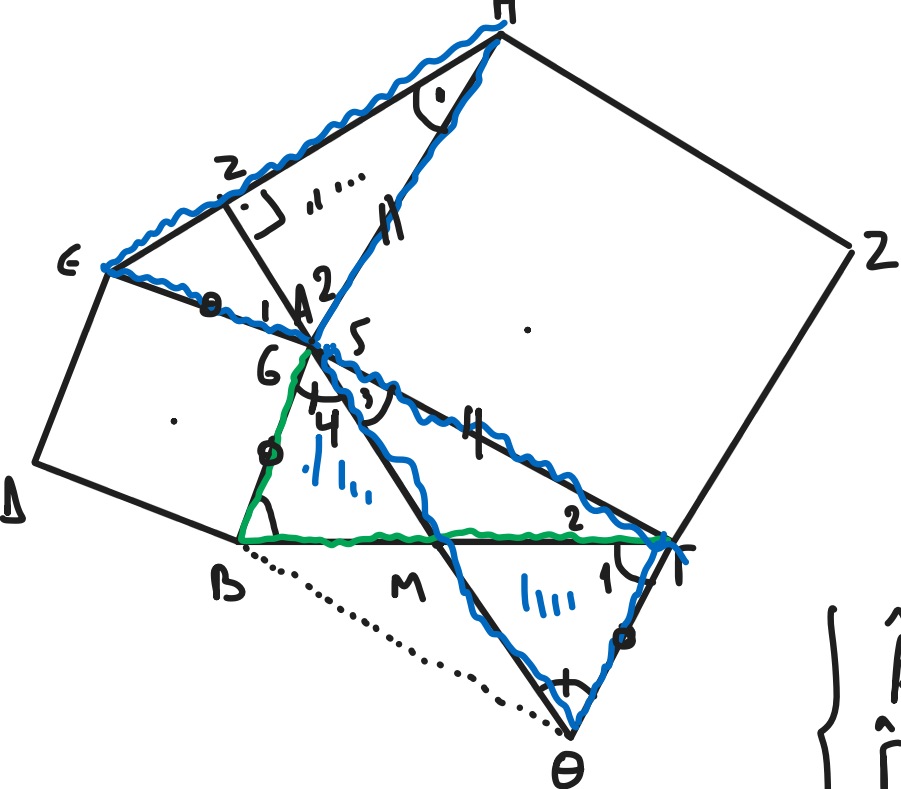


$$\begin{aligned} \text{Αφού } \Theta \text{ το κέντρο μάζας των 2 διχοτόμων} \\ \text{ώστε θα περνά και η } AM \Rightarrow A\Theta \text{ διχοτόμος.} \\ \text{Επίσης } A\Theta \text{ ύψος} \Rightarrow \triangle ABC \text{ ισοσκελές.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη του θεωρήματος. } BD, CE \text{ διχοτόμοι} \Rightarrow A\Theta \text{ διχοτόμος} \\ \Theta \in (BD) \Rightarrow \Theta D = \Theta H \\ \Theta \in (CE) \Rightarrow \Theta E = \Theta I \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \Theta H = \Theta I \\ \Theta D = \Theta E \end{array} \right\} \Rightarrow A\Theta \text{ διχοτόμος}$$

9) Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ και εξωτερικά του τριγώνου, σχηματίζονται τα τετράγωνα $ABDE$ και $ACFH$. Να δείξετε ότι ο φορέας της διαμέσου AM του τριγώνου $\triangle ABC$, τέμνει κάθετα την EH .



$$\begin{aligned} \triangle HAE & \triangle HCF \\ EA &= CF (= AB) \\ AH &= HF \\ \hat{A}_{12} &= \hat{F}_{12} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_3 \\ \hat{A}_{12} = \hat{F}_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_3$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{12} + \hat{A}_{34} + \hat{A}_{56} + \hat{A}_{78} + \hat{A}_{90} &= 360^\circ \Rightarrow \\ \hat{A}_{12} + \hat{A}_{34} &= 180^\circ \\ \hat{F}_{12} + \hat{F}_{34} &= 180^\circ \text{ (διαδοχ. γωνίες \#)} \\ \Rightarrow \hat{A}_{12} + \hat{A}_{34} &= \hat{F}_{12} + \hat{F}_{34} \Rightarrow \hat{A}_{12} = \hat{F}_{12} \\ \hat{A}_{34} + \hat{A}_{56} + \hat{A}_{78} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_{34}, \hat{A}_{56}, \hat{A}_{78} \text{ συμπληρωματικές} \Rightarrow \hat{H}_1, \hat{A}_2 \text{ συμπληρωματικές} \Rightarrow \\ \hat{A}_2 &= \hat{H}_1, \text{ έσω } \hat{Z} = 90^\circ \text{ ο.ε.δ.} \end{aligned}$$