

Θεώρημα: $(a^2+b^2) \cdot (x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ C-S $\rightarrow \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y}$
 Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow ay = bx$ $\rightarrow x^x y$

7] Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x+y=5$ να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης $A = 2x^2 + 3y^2$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{C-S}} (x^2+y^2) \cdot (\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2) &\geq (\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)^2 \\ (2x^2+3y^2) \cdot (2+3) &\geq (\sqrt{6}x + \sqrt{6}y)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \\ (2x^2+3y^2) \cdot 5 &\geq 6(x+y)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \\ (2x^2+3y^2) \cdot 5 &\geq 6 \cdot 25 \Leftrightarrow 2x^2+3y^2 \geq 6 \end{aligned}$$

Το "=" ισχύει $\sqrt{2}x \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}y \Leftrightarrow 2x = 3y$
 Τότε το min της ποσότητας $2x^2 + 3y^2$ θα είναι 6.

8] Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $2x+y=3$ να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης $A = x^2 + 2y^2$

$$\begin{aligned} \text{Θέλω } (x^2+y^2) \cdot (\dots) &\geq (\dots)^2 \rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{2}} \\ (x^2+y^2) \cdot (2^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2) &\geq (2x + \sqrt{2}y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})^2 \\ (x^2+y^2) \cdot (4 + \frac{1}{2}) &\geq (2x+y)^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2) \cdot \frac{9}{2} \geq 9 \\ x^2+y^2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2\sqrt{2}y$ $\rightarrow$ Το min της $x^2 + 2y^2$ είναι 2.

9] Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x^2+y^2=10$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = 2x+y$

$$\begin{aligned} (x^2+y^2) \cdot (\dots) &\geq (2x+y)^2 \rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{1} \\ (x^2+y^2) \cdot (2^2+1^2) &\geq (2x+y)^2 \Leftrightarrow 10 \cdot 5 \geq (2x+y)^2 \\ 10 \cdot 5 &\geq (2x+y)^2 \Leftrightarrow (2x+y)^2 \leq 50 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+y)^2} \leq \sqrt{50} \\ |2x+y| &\leq \sqrt{50} \Leftrightarrow -\sqrt{50} \leq 2x+y \leq \sqrt{50} \quad (2) \end{aligned}$$

Γράφεται να είναι το max το $\sqrt{50}$ και το min το $-\sqrt{50}$
 Το "=" στην (2) ισχύει $\Leftrightarrow$ ισχύει το "=" στην (1) $\Leftrightarrow x=2y$
 $2x+y=\sqrt{50} \Leftrightarrow x=2y$ και $x, 2y > 0$ $\rightarrow$ Άρα το max $(2x+y)$ είναι $\sqrt{50}$
 $2x+y=-\sqrt{50} \Leftrightarrow x=2y$ και $x, 2y < 0$ $\rightarrow$ min $(2x+y) \rightarrow -\sqrt{50}$
 Σημειώνω αν έχω ότι $2x+y \leq \sqrt{50}$ και δεν ξέρω αν ισχύει το "="
 Τότε το $\sqrt{50}$ είναι ανώτατο όριο αλλά όχι max.
 η.κ. δεξιάς: $2x+y \leq \sqrt{50} < 8$. Μπορώ να πω $2x+y \leq 8$ (βέβαια)
 εφ'όσον $170 < 8$ $\rightarrow$ εφ'όσον 8 είναι ένα άνω φράγμα - όχι max

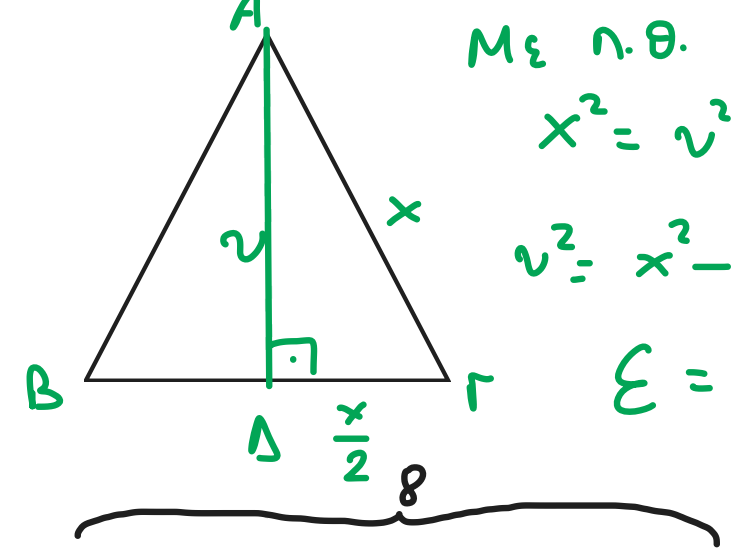
10] Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $2x^2+y^2=6$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = x+y$

$$\begin{aligned} (2x^2+y^2) \cdot (\dots) &\geq (x+y)^2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{1} \\ [(2x)^2+y^2] \cdot (\frac{1}{2}^2+1^2) &\geq (\frac{1}{\sqrt{2}}x + y)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x \cdot y \\ (2x^2+y^2) \cdot (\frac{1}{2}+1) &\geq (x+y)^2 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3}{2} \geq (x+y)^2 \\ (x+y)^2 &\leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+y)^2} \leq 3 \Leftrightarrow |x+y| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+y \leq 3 \quad (2) \end{aligned}$$

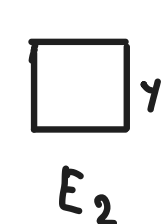
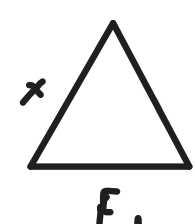
Το "=" στην (2) ισχύει $\Leftrightarrow$ ισχύει το "=" στην (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}y \Leftrightarrow 2x=y$
 $x+y=3 \Leftrightarrow 2x=y > 0$ $\rightarrow$ Άρα max $\{x+y\} = 3$ $\boxed{2x=y}$
 $x+y=-3 \Leftrightarrow 2x=y < 0$ $\rightarrow$ min $\{x+y\} = -3$

12] Σύμφωνα με τους 8m κόβεται σε δύο τμήματα και με το ένα κατασκευάζεται ισοπλευρό τρίγωνο και με το άλλο τετράγωνο. Να βρεθεί σε ποιο σημείο πρέπει να κόβουμε το σύρμα για να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων.

Ενδιαφέρον πρόβλημα: Δίνεται ισοπλευρό τρίγωνο πλευράς x . Να βρεθεί το εμβαδόν



$$\begin{aligned} \text{Με η.θ. έχω} \quad x^2 &= y^2 + (\frac{x}{2})^2 \Rightarrow y^2 = x^2 - (\frac{x}{2})^2 \\ y^2 &= x^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}x}{2} \\ E &= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \end{aligned}$$



$$E_1 = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}, \quad E_2 = y^2$$

Θέλω να βρω το ελάχιστο της ποσότητας $\frac{\sqrt{3}x^2}{4} + y^2$
 Με τη δέσμευση $3x+4y=8$ $\rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot y$

$$\begin{aligned} \text{Έχω: } \left[\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \right)^2 + y^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 \right)^2 + 4^2 \right] &\geq \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 + 4y \right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{3} \cdot 3 \\ \left(\frac{\sqrt{3}x^2}{4} + y^2 \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 9 + 16 \right) &\geq (3x+4y)^2 \Leftrightarrow \frac{64}{12\sqrt{3}+16} = \frac{64}{4(3\sqrt{3}+4)} \end{aligned}$$

Άρα $E_1 + E_2 \geq \frac{16}{3\sqrt{3}+4}$. Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow \dots$

Άρα το min των $E_1 + E_2 = \frac{16}{3\sqrt{3}+4}$.