

Ανισότητα αριθμητικά-γεωμετρικών μέσων (Cauchy)

Για 2 θετικούς αριθμούς a, b ,

- 1) ονομάζουμε αριθμητικό μέσο των a, b τον $\frac{a+b}{2}$
- 2) $\Rightarrow$ γεωμετρικό μέσο των a, b τον $\sqrt{ab}$
- 3) $\Rightarrow$ αρμονικό $\Rightarrow$ των a, b τον $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Θεώρημα: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ και $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

Η ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow a=b$ σε κάθε περίπτωση.

Για να δούμε: $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$
 $(x-y)^2 \geq 0$ για $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \Leftrightarrow$
 $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{2}$

Κυβική ρίζα, να a (απόβλ. $\sqrt[3]{a} = x$) και $x^3 = a$
 $\sqrt[4]{a} = x \Leftrightarrow x^4 = a$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow 2^4 = 16$
 $(\sqrt[3]{a})^3 = a \Rightarrow \sqrt[3]{a} = a$, $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c}$.

Ανισότητα AM-GM για 3 όρους:

(1) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ για $a, b, c \geq 0$

Το " $\geq$ " ισχύει μόνο όταν $a=b=c$ $a, b, c > 0$

Ανισότητα AM-GM για 4 όρους: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ (2)

Απόδειξη της (2)

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ (3)
 $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$
 Τώρα $\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt[4]{abcd}$

Άρα $\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$ (4)

Από (3) [δύο 2] $\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \stackrel{(4)}{\geq} \sqrt[4]{abcd}$ ο.ε.δ.

Τώρα θα δείξω με AM-GM για 3 όρους.

δηλ. $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Έχω τους 4 όρους $a, b, c, \frac{a+b+c}{3}$

Από AM-GM για 4 όρους έχω $\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}}$ (1)

$\frac{3a+3b+3c+a+b+c}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot x} \Leftrightarrow \frac{4a+4b+4c}{12} \geq \sqrt[4]{abc \cdot x} \Leftrightarrow$

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \cdot x} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[4]{abc \cdot x} \Leftrightarrow x^4 \geq abc \cdot x \Leftrightarrow$

$x^3 \geq abc \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

1) Να δείξετε ότι $\forall x, y, z, t > 0$
 $\frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{4} + \frac{y^4+z^4+t^4+x^4}{4} + \frac{z^4+t^4+x^4+y^4}{4} + \frac{t^4+x^4+y^4+z^4}{4} \geq 12\sqrt[3]{xyzt}$

Χαρακτηριστικό γνώρισμά της ισότητας είναι ότι
 το μέλος έχει αντισυμμετρία, ενώ το 2ο μέλος συμμετρία

Από AM-GM έχω $x^4+y^4+z^4+t^4 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} \Rightarrow \frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^4y^4z^4}{4}}$ (1)

$\frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^4y^4z^4}{4}}$
 $\frac{y^4+z^4+t^4+x^4}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^4z^4t^4}{4}}$
 $\frac{z^4+t^4+x^4+y^4}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{z^4t^4x^4}{4}}$
 $\frac{t^4+x^4+y^4+z^4}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{t^4x^4y^4}{4}}$
 $\Rightarrow$ το 1ο μέλος της ανισότητας
 που θέλω να δείξω το
 ονομάζω Α.
 Με πρόσθεση και των 4 έχω

$A \geq 3 \left[\sqrt[3]{\frac{x^4y^4z^4}{4}} + \sqrt[3]{\frac{y^4z^4t^4}{4}} + \sqrt[3]{\frac{z^4t^4x^4}{4}} + \sqrt[3]{\frac{t^4x^4y^4}{4}} \right]$ (2)

Από AM-GM για 4 όρους έχω:

$\rightarrow A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \geq 4 \sqrt[4]{A_1 A_2 A_3 A_4} = 4 \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{x^4y^4z^4}{4}} \sqrt[3]{\frac{y^4z^4t^4}{4}} \sqrt[3]{\frac{z^4t^4x^4}{4}} \sqrt[3]{\frac{t^4x^4y^4}{4}}} =$
 $= 4 \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{x^4y^4z^4 \cdot y^4z^4t^4 \cdot z^4t^4x^4 \cdot t^4x^4y^4}{4^3}}} = 4 \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{x^4y^4z^4t^4 \cdot x^4y^4z^4t^4 \cdot x^4y^4z^4t^4}{4^3}}} =$
 $= 4 \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{x^{12}y^{12}z^{12}t^{12}}{4^3}}} = 4 \sqrt[4]{\sqrt[3]{(xyzt)^4}} = 4 \sqrt[4]{xyzt}$

Έχω δείξει: $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \geq 4 \sqrt[4]{xyzt}$

από (1) $\Rightarrow A \geq 3 \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \geq 3 \cdot 4 \sqrt[4]{xyzt} = 12 \sqrt[4]{xyzt}$ ο.ε.δ.

3) Αν $x, y > 0$ και $x^3 + 3y = 4$ τότε $xy \leq 1$

Παρατηρώ ότι έχω δεδομένο ένα άθροισμα: $x^3 + 3y$
 ενώ θέλω να δείξω κάτι (ανισότητα) με γινόμενο.

1η προσέγγιση: Από AM-GM $\frac{x^3 + 3y}{4} \geq 2\sqrt{x^3y} \Leftrightarrow$
 $4 \geq 2\sqrt{3x^3y} \Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{3x^3y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \geq x^3y \Leftrightarrow x^3y \leq 4$ ατελέστερη προσέγγιση.

2η προσέγγιση: Από AM-GM $\frac{x^3 + 3y}{4} = \frac{x^3 + y + y + y}{4} \geq 4\sqrt[4]{x^3y \cdot y \cdot y} = 4\sqrt[4]{x^3y^3}$
 3η προσέγγιση: $\frac{x^3 + 3y}{4} = \frac{x^3 + 2y + y}{4} \geq 4\sqrt[4]{x^3y^2 \cdot y} = 4\sqrt[4]{x^3y^3}$

$1 \geq \sqrt[4]{(xy)^3} \Leftrightarrow 1 \geq (xy)^3 \Leftrightarrow (xy)^3 \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq 1$ ο.ε.δ.

5) Αν $x, y > 0$ και $8x^4 + xy^2 = 5$ τότε $xy \leq 1$

1η προσέγγιση: $8x^4 + xy^2 \geq 2\sqrt{8x^4 \cdot xy^2} = 2\sqrt{8x^5y^2}$
 $\frac{5}{2} \geq 2\sqrt{8x^5y^2}$ ατελέστερη μέθοδος

2η προσέγγιση: $8x^4 + xy^2 = 2x^4 + 2x^4 + 2x^4 + 2x^4 + xy^2 \geq 5\sqrt[5]{2x^4 \cdot 2x^4 \cdot 2x^4 \cdot 2x^4 \cdot xy^2}$
 $\frac{5}{2} \geq 5\sqrt[5]{2^4 \cdot x^4 \cdot y^2}$ διαφορετικοί εκθέτες των x, y

Σκέφτο: να βγάλω τον 1° όρο ($8x^4$) σε k όρους και τον

2° όρο (xy^2) σε λ όρους.

Τότε από τον 1ο όρο ($8x^4$) θα βγει $\frac{x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 \cdot x^4}{4 \text{ φορές}} = x^4$

από τον 2° όρο (xy^2) θα βγει $\frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{4 \text{ φορές}} = x^2$

Συνολικά η δύναμη των x: (x^{4k+2})

Ναίτε θα να δύναμη των y: άρα $x \cdot y^2$ θα το βγάλω σε λ όρους.

$x \cdot y^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot \dots \cdot x \cdot y^2$: η δύναμη των y είναι $(y^2)^\lambda = y^{2\lambda}$

Θα πρέπει $4k+2 = 2\lambda \Leftrightarrow 4k = 2\lambda - 2 \Leftrightarrow 4k = \lambda \Rightarrow \lambda = 4k$

$\rightarrow 8x^4 + xy^2 = 8x^4 + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 \geq$

$5\sqrt[5]{8x^4 \cdot \frac{1}{4}xy^2 \cdot \frac{1}{4}xy^2 \cdot \frac{1}{4}xy^2 \cdot \frac{1}{4}xy^2} = 5\sqrt[5]{\frac{2}{4^3}x^8y^8} = 5\sqrt[5]{\frac{2}{2^6}x^8y^8} =$

$= 5\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}(xy)^8} = 5\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} \cdot \sqrt[5]{(xy)^8} = \frac{5}{2}\sqrt[5]{(xy)^8}$

Άρα $8x^4 + xy^2 \geq \frac{5}{2}\sqrt[5]{(xy)^8} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}\sqrt[5]{(xy)^8} \Leftrightarrow$

$1 \geq \sqrt[5]{(xy)^8} \Leftrightarrow 1^5 \geq (xy)^8 \Leftrightarrow (xy)^8 \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq 1$ ο.ε.δ.