

Θεωρούμε την ανίσωση Cauchy-Schwarz ,
 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ $\rightarrow a \quad b$
 $\rightarrow x \quad y$

Ανίσωση Αδρescu αν $a, b > 0$

Ζητείται $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ (1) $a, b > 0$

Απόδειξη: (1) $\Leftrightarrow (a+b) \cdot \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) \geq (x+y)^2$ (2)

Από ανίσωση C-S έχω $\rightarrow \sqrt{a} \quad \sqrt{b}$

$(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}) \cdot \left(\left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{b}} \right)^2 \right) \geq$ $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}} \quad \frac{y}{\sqrt{b}}$

$\left(\sqrt{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{y}{\sqrt{b}} \right)^2 \Leftrightarrow$

$(a+b) \cdot \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) \geq (x+y)^2$ που είναι η (2)

η οποία είναι ισοδύναμη με την (1)

Άρα $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, για $a, b > 0$, x, y οποιονδήποτε

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{w^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+w)^2}{a+b+\gamma}$

Απόδειξη: έχω $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{w^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{w^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+w)^2}{a+b+\gamma}$

Θα μπορούσα να έχω

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{w^2}{\gamma} + \frac{z^2}{\delta} \geq \frac{(x+y+w+z)^2}{a+b+\gamma+\delta}$

Άσκηση: Αν $a, b, \gamma > 0$ και $\underline{a+b+\gamma=1}$, να δείξετε ότι:

$\frac{(a+b)^2}{\gamma+1} + \frac{(b+\gamma)^2}{a+1} + \frac{(\gamma+a)^2}{b+1} \geq 1$

Απόδειξη: από την Αδρescu για 3 όρους έχω

$\frac{(a+b)^2}{\gamma+1} + \frac{(b+\gamma)^2}{a+1} + \frac{(\gamma+a)^2}{b+1} \geq \frac{(a+b+b+\gamma+\gamma+a)^2}{\gamma+1+a+1+b+1} = \frac{(2a+2b+2\gamma)^2}{a+b+\gamma+3}$
 $= \frac{[2 \cdot (a+b+\gamma)]^2}{1+3} = \frac{(2 \cdot 1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ο.ε.δ.

Άσκηση: Αν $a, b, \gamma, \delta > 0$ και $\overline{a+b+\gamma+\delta=1}$, να δείξετε ότι

$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+\delta} + \frac{\delta^2}{\delta+a} \geq \frac{1}{2}$

Απόδειξη Από Αδρescu για 4 όρους έχω:

$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+\delta} + \frac{\delta^2}{\delta+a} \geq \frac{(a+b+\gamma+\delta)^2}{a+b+b+\gamma+\gamma+\delta+\delta+a} = \frac{1^2}{2a+2b+2\gamma+2\delta} =$
 $= \frac{1}{2(a+b+\gamma+\delta)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ ο.ε.δ.