

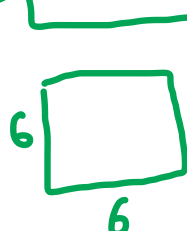
7] Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερό εμβαδόν 160 με 36 cm^2 να βρεθεί εκείνο με την ελάχιστη περίμετρο.

Θεωρούμε την ανισότητα AM-GM: Για $a, b > 0$ ισχύει $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow a=b$.

4  $\pi = 13 \cdot 2 = 26$

3  $\pi = 15 \cdot 2 = 30$

6  $\pi = 6 \cdot 4 = 24$

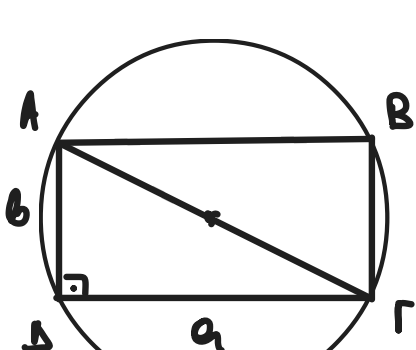
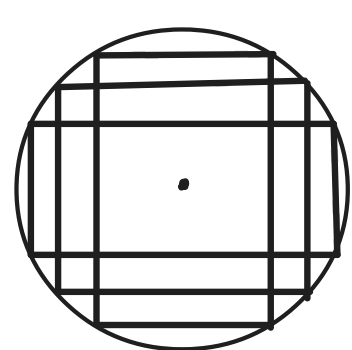
6  $\pi_{\text{ερ}} = 2a+2b = 2(a+b)$
 αρκεί να βρω το $\min\{a+b\}$
 $\Xi \text{ρω } t = 36 \Rightarrow a \cdot b = 36$

Από AM-GM έχω $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{36} \Rightarrow a+b \geq 12 \Rightarrow \min\{a+b\} = 12$

Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow a=b \Rightarrow$ το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

13] Σε κύκλο ακτίνας $r=1 \text{ cm}$ εγγράφουμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Να βρεθούν οι διαστάσεις του για τις οποίες μεγιστοποιείται το εμβαδόν του.



Από το Π.Θ. στο $\triangle AFA$: $a^2+b^2=4$

Θέλω $a, b \rightarrow \max$.

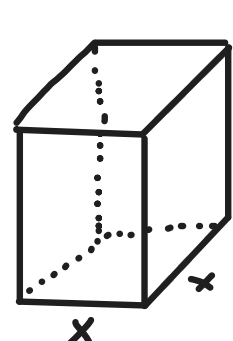
Από AM-GM: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2} \Rightarrow$

$\frac{4}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow 2 \geq \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow a \cdot b \leq 2$

Το "=" ισχύει όταν $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

Το $\max\{ab\} = 2$ όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο.

14] Μια δεξαμενή νερού έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τις δύο έδρες του τετράγωνα. Το πάνω μέρος της δεξαμενής είναι ανοικτό και είναι κατασκευασμένο από λαμαρίνα εμβαδού 27 m^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις της δεξαμενής για να χωράει τη μέγιστη δυνατή ποσότητα νερού.



Έσθ x^2 . Για την κάθε παραλληλ. έδρα έχω $E = x \cdot y$

Συνολ. εμβαδ. = $E = x^2 + 4xy = 27$

Θέλω να έχω το μέγιστο όγκο. $V = x \cdot x \cdot y = x^2 y \rightarrow \max$.

1η προσέγγιση: $\frac{x^2 + 4xy}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot 4xy} \Rightarrow \frac{27}{2} \geq \sqrt{4x^3 y} \Rightarrow 10.8 \geq 2x\sqrt{xy}$

2η προσέγγιση: $x^2 + 4xy = x^2 + 2xy + 2xy$

$\frac{x^2 + 2xy + 2xy}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy} = \sqrt[3]{4x^4 y^2} = \sqrt[3]{4(x^2 y)^2} \Rightarrow$

$\frac{x^2 + 2xy + 2xy}{3} \geq \sqrt[3]{4(x^2 y)^2} \Rightarrow \frac{27}{3} \geq \sqrt[3]{4(x^2 y)^2} \Rightarrow 9 \geq \sqrt[3]{4(x^2 y)^2} \Rightarrow$

$9^3 \geq 4(x^2 y)^2 \Rightarrow \frac{9^3}{4} \geq (x^2 y)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{9^3}{4}} \geq \sqrt{(x^2 y)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{9^3}{4}} \geq |x^2 y|$

Από το πρόβλημα έχω $x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{9^3}{4}} \geq x^2 y \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{9^3}{4}} = \frac{\sqrt{9^3}}{\sqrt{4}} = \frac{27}{2} = \frac{27}{2} \Rightarrow x^2 y \leq \frac{27}{2}$

Το "=" ισχύει όταν $x^2 = 2xy \Rightarrow x = 2y$

Τότε $\max\{x^2 y\} = \frac{27}{2}$

Θεωρούμε την ανισότητα Adrescu.

Για $a, b > 0$ ισχύει $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$

Για $a, b, \gamma > 0$ ισχύει $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{w^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+w)^2}{a+b+\gamma}$

Αν $a, b, \gamma > 0$ και $a+b+\gamma=1$, v.s.o.

$A = \frac{(a+b)^2}{\gamma+1} + \frac{(b+\gamma)^2}{a+1} + \frac{(\gamma+a)^2}{b+1} \geq 1 \quad (1)$

Λίαν. Από ανισότητα Adrescu έχω

$A \geq \frac{(a+b+b+\gamma+\gamma+a)^2}{\gamma+1+a+1+b+1} = \frac{[2(a+b+\gamma)]^2}{a+b+\gamma+3} = \frac{(2 \cdot 1)^2}{1+3} = \frac{4}{4} = 1$

Άρα $A \geq 1$ ο.ε.δ.

Αν $a, b, \gamma > 0$ v.s.o. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+\gamma} + \frac{1}{\gamma+a} \geq \frac{9}{2(a+b+\gamma)}$

έχω $A = \frac{1^2}{a+b} + \frac{1^2}{b+\gamma} + \frac{1^2}{\gamma+a} \geq \frac{(1+1+1)^2}{a+b+\gamma+a} = \frac{9}{2(a+b+\gamma)} \quad \text{ο.ε.δ.}$

Αν $a, b > 1$, v.s.o. $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8 \quad (1)$

Από ανισότητα Adrescu έχω $A \geq \frac{(a+b)^2}{b-1+a-1} = \frac{(a+b)^2}{a+b-2}$

Θα δείξω ότι $\frac{(a+b)^2}{a+b-2} \geq 8 \quad (2)$ Θέτω $a+b=x$

(2) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-2} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-2} \geq 8(x-2) \Leftrightarrow x^2 \geq 8x-16 \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει

Άρα ισχύει η (2) $\Leftrightarrow$ (1).

Βασική ανισότητα: $a^2+b^2+\gamma^2 \geq ab+b\gamma+a\gamma \quad (1)$

Απόδειξη: (1) $\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2\gamma^2 \geq 2ab+2b\gamma+2a\gamma \Leftrightarrow$

$2a^2+2b^2+2\gamma^2 - 2ab - 2b\gamma - 2a\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} + \underbrace{b^2 - 2b\gamma + \gamma^2}_{(b-\gamma)^2} + \underbrace{\gamma^2 - 2a\gamma + a^2}_{(\gamma-a)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$

Το οποίο ισχύει διότι $(a-b)^2 \geq 0, (b-\gamma)^2 \geq 0, (\gamma-a)^2 \geq 0$.

Το "=" ισχύει $\Leftrightarrow a=b=\gamma$

Ισχύει $a^2+b^2+\gamma^2+\delta^2 \geq ab+b\gamma+\gamma\delta+\delta a \quad (1)$

Απόδειξη: (1) $\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2\gamma^2+2\delta^2 \geq 2ab+2b\gamma+2\gamma\delta+2\delta a \Leftrightarrow \dots$

Κρατώντας το $\frac{a^2+b^2+\gamma^2}{3} \geq \frac{ab+b\gamma+\gamma a}{3}$

Άρα: Αν $a, b, \gamma > 0$ και $a^2+b^2+\gamma^2=3$, v.s.o.

$A = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b\gamma} + \frac{1}{1+\gamma a} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$

Από: Από Adrescu έχω

$A \geq \frac{(1+1+1)^2}{1+ab+1+b\gamma+1+\gamma a} = \frac{9}{3+ab+b\gamma+\gamma a} \geq \frac{9}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Από προηγούμενη ανισότητα: $a^2+b^2+\gamma^2 \geq ab+b\gamma+\gamma a \Rightarrow 3 \geq ab+b\gamma+\gamma a \Rightarrow$

$ab+b\gamma+\gamma a \leq 3$

Άρα $A \geq \frac{3}{2}$ ο.ε.δ.