

Άσκηση Αν  $a, b, \gamma > 0$ , ν.δ.α  $\frac{a}{b+2\gamma} + \frac{b}{\gamma+2a} + \frac{\gamma}{a+2b} \geq 1$  (1)

Ανάλ.  $A = \frac{\sqrt{a}^2}{b+2\gamma} + \frac{\sqrt{b}^2}{\gamma+2a} + \frac{\sqrt{\gamma}^2}{a+2b} \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{\gamma})^2}{3a+3b+3\gamma} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{\gamma})^2}{3(a+b+\gamma)}$

Θα δ.ο.  $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{\gamma})^2}{3(a+b+\gamma)} \geq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{\gamma})^2 \geq 3(a+b+\gamma) \Leftrightarrow$

$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{\gamma}^2 + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{b\gamma} + 2\sqrt{\gamma a} \geq 3a + 3b + 3\gamma \Leftrightarrow$

$2\sqrt{ab} + 2\sqrt{b\gamma} + 2\sqrt{\gamma a} \geq 2a + 2b + 2\gamma \Leftrightarrow$

$\sqrt{ab} + \sqrt{b\gamma} + \sqrt{\gamma a} \geq a + b + \gamma \Leftrightarrow$

$\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma}\sqrt{a} \geq \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{\gamma}^2$  Εφαρμογή 6ε αδ.ι.ξ.ο.δ.ο

δ.ι.ο.ν. έχω:  $a^2 + b^2 + \gamma^2 \geq a\gamma + b\gamma + \gamma a \Leftrightarrow$  Εφαρμογή 6ε αδ.ι.ξ.ο.δ.ο  
 $\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{\gamma}^2 \geq \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma}\sqrt{a}$  όπως έχει "ανώτατο" γράφει

2η προσέγγιση είναι:  $\frac{a}{b+2\gamma} + \frac{b}{\gamma+2a} + \frac{\gamma}{a+2b} \geq 1$

$A = \frac{a^2}{a(b+2\gamma)} + \frac{b^2}{b(\gamma+2a)} + \frac{\gamma^2}{\gamma(a+2b)} \geq \frac{(a+b+\gamma)^2}{a\gamma + 2a\gamma + b\gamma + 2ab + a\gamma + 2b\gamma} = \frac{(a+b+\gamma)^2}{3a\gamma + 3a\gamma + 3b\gamma}$

Θα δ.ι.ξ.ω. ότι  $\frac{(a+b+\gamma)^2}{3a\gamma + 3a\gamma + 3b\gamma} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+\gamma)^2 \geq 3a\gamma + 3a\gamma + 3b\gamma \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2b\gamma + 2\gamma a \geq 3a\gamma + 3a\gamma + 3b\gamma \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 + \gamma^2 \geq a\gamma + b\gamma + a\gamma$  η οποία ισχύει. Άρα έδειξα την άρνηση.

Άσκηση: Για  $n \geq 2$  και  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  θετικοί αριθμοί με άθροισμα 1,

και  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$  πραγματικοί, να δ.ο.

$b_1^2 + \frac{b_2^2}{a_1} + \frac{b_3^2}{a_2} + \dots + \frac{b_n^2}{a_{n-1}} \geq 2b_1(b_2 + b_3 + \dots + b_n)$  (1)

Ανάλ. Αν  $A = \frac{(b_2 + b_3 + \dots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$

$\Rightarrow b_1^2 + A \geq b_1^2 + \underbrace{(b_2 + b_3 + \dots + b_n)^2}_k \geq 2b_1 \underbrace{(b_2 + b_3 + \dots + b_n)}_k$

$b_1^2 + k^2 \geq 2b_1 k \Leftrightarrow b_1^2 - 2b_1 k + k^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b_1 - k)^2 \geq 0$  2ο ορόσημο  
Ισχύει

2. Έάν  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$  νά δειχθῇ ὅτι:

$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$  (1)

(1)  $\Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2})^2 \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{a^2 + x^2}^2 + 2\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{b^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + y^2}^2 \geq (a+b)^2 + (x+y)^2 \Leftrightarrow$

$a^2 + x^2 + 2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)} + b^2 + y^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 + x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)} \geq 2ab + 2xy \Leftrightarrow$

$\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)} \geq ab + xy$  Αν το b' κελος είναι αρνητικό τότε είναι αυτονόητο

Αν το b' κελος είναι θετικό τότε υψώνω:

$\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)} \geq (ab + xy)^2 \Leftrightarrow$

$(a^2 + x^2)(b^2 + y^2) \geq (ab + xy)^2$  Μας  $\rightarrow a \ x$   
δ.ι.ξ.ω.  $\rightarrow b \ y$   
C-S.  $(a^2 + x^2)(b^2 + y^2) \geq (ab + xy)^2$

$a^2 b^2 + a^2 y^2 + b^2 x^2 + x^2 y^2 \geq a^2 b^2 + 2abxy + x^2 y^2 \Leftrightarrow$

$a^2 y^2 - 2abxy + b^2 x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$  2ο ορόσημο  
Ισχύει

Άσκηση - Εργασία.

1) Αν  $a, b, \gamma, \delta > 0$  και  $a + b + \gamma + \delta = 1$ , να δ.ο.

$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+\delta} + \frac{\delta^2}{\delta+a} \geq \frac{1}{2}$

2) Αν  $x, y, w > 0$  και  $\lambda \geq 0$ , να δ.ο.

$\frac{(x+y)^2}{x+y+2w} + \frac{(y+w)^2}{y+w+2x} + \frac{(w+x)^2}{w+x+2y} \geq \frac{4(x+y+w)}{\lambda+2}$

3) Αν  $a, b, \gamma, \delta, \epsilon > 0$ , να δ.ο.

$\frac{a}{b+\gamma} + \frac{b}{\gamma+\delta} + \frac{\gamma}{\delta+\epsilon} + \frac{\delta}{\epsilon+a} + \frac{\epsilon}{a+b} \geq \frac{5}{2}$

3. Έάν  $a \geq 0, b \geq 0$  νά δειχθῇ ὅτι:

$\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b - \frac{2}{3}\sqrt{ab}$