Άσκηση: Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, ν.δ.ο $\underbrace{\dfrac{\alpha}{\beta+2\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma+2\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha+2\beta}}_{A} \geq 1$ (1)

Αποδ.)

$$A=\frac{\sqrt{\alpha}^2}{\beta+2\gamma}+\frac{\sqrt{\beta}^2}{\gamma+2\alpha}+\frac{\sqrt{\gamma}^2}{\alpha+2\beta} \geq \frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2}{3\alpha+3\beta+3\gamma}=\frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2}{3(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Θα δ.ο. $\dfrac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2}{3(\alpha+\beta+\gamma)} \geq 1 \iff (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2 \geq 3(\alpha+\beta+\gamma) \iff$

$$\cancel{\sqrt{\alpha}^2}+\cancel{\sqrt{\beta}^2}+\cancel{\sqrt{\gamma}^2}+2\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\beta\gamma}+2\sqrt{\gamma\alpha} \geq 3\alpha+3\beta+3\gamma \iff$$

$$2\sqrt{\alpha\beta}+2\sqrt{\beta\gamma}+2\sqrt{\gamma\alpha} \geq 2\alpha+2\beta+2\gamma \iff$$

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma \iff$$

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2+\sqrt{\gamma}^2$ Έφτασα σε αδιέξοδο

διότι έχω: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Rightarrow$

$\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2+\sqrt{\gamma}^2 \geq \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\alpha}$

όπως έχει "ανάποδη" φορά

2η προσπάθεια: $\underbrace{\dfrac{\alpha}{\beta+2\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma+2\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha+2\beta}}_{A} \geq 1$

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha(\beta+2\gamma)}+\frac{\beta^2}{\beta(\gamma+2\alpha)}+\frac{\gamma^2}{\gamma(\alpha+2\beta)} \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma+2\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta\gamma}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma}$$

Θα δείξω ότι $\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma} \geq 1 \iff (\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma \iff$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \geq 3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma \iff$$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$ η οποία ισχύει. Άρα έδειξα την αρχική.

Άσκηση: Για $\nu \geq 2$ και $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots \alpha_{\nu-1}$ θετικοί αριθμοί με άθροισμα 1, και $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots \beta_\nu$ τυχαίοι αριθμοί, να δ.ο.

$$\beta_1^2+\underbrace{\frac{\beta_2^2}{\alpha_1}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_2}+\dots+\frac{\beta_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}}}_{A} \geq 2\beta_1(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\dots+\beta_\nu) \quad (1)$$

Αποδ.)

Από Andreescu έχω: $A \geq \dfrac{(\beta_2+\beta_3+\dots+\beta_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\nu-1}}=(\beta_2+\beta_3+\dots+\beta_\nu)^2$

$$\Rightarrow \beta_1^2+A \geq \beta_1^2+(\underbrace{\beta_2+\beta_3+\dots+\beta_\nu}_{k})^2 \geq 2\beta_1(\underbrace{\beta_2+\beta_3+\dots+\beta_\nu}_{k}).$$

$\beta_1^2+k^2 \geq 2\beta_1 k \iff \beta_1^2-2\beta_1 k+k^2 \geq 0 \iff (\beta_1-k)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει

2. Εάν $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ νά δειχθῆ ὅτι:

$$\sqrt{\alpha^2+x^2}+\sqrt{\beta^2+y^2} \geq \sqrt{(\alpha+\beta)^2+(x+y)^2} \quad (1)$$

$$(1) \iff \left(\sqrt{\alpha^2+x^2}+\sqrt{\beta^2+y^2}\right)^2 \geq \sqrt{(\alpha+\beta)^2+(x+y)^2}^{\,2} \iff$$

$$\sqrt{\alpha^2+x^2}^2+2\sqrt{\alpha^2+x^2}\cdot\sqrt{\beta^2+y^2}+\sqrt{\beta^2+y^2}^2 \geq (\alpha+\beta)^2+(x+y)^2 \iff$$

$$\cancel{\alpha^2}+\cancel{x^2}+2\sqrt{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)}+\cancel{\beta^2}+\cancel{y^2} \geq \cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2}+\cancel{x^2}+2xy+\cancel{y^2} \iff$$

$$\cancel{2}\sqrt{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)} \geq \cancel{2}\alpha\beta+\cancel{2}xy \iff$$

$\sqrt{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)} \geq \alpha\beta+xy$ Αν το β' μέλος είναι αρνητικό τότε είναι αληθής

Αν το β' μέλος είναι θετικό τότε υψώνω:

$$\sqrt{(\alpha^2+x^2)\cdot(\beta^2+y^2)}^{\,2} \geq (\alpha\beta+xy)^2 \iff$$

$$(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2) \geq (\alpha\beta+xy)^2$$

Μας θυμίζει C-S. $\to \alpha \; x$, $\to \beta \; y$

$(\alpha^2+x^2)\cdot(\beta^2+y^2) \geq (\alpha\beta+xy)^2$

$$\cancel{\alpha^2\beta^2}+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\cancel{x^2y^2} \geq \cancel{\alpha^2\beta^2}+2\alpha\beta xy+\cancel{x^2y^2} \iff$$

$\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy+\beta^2x^2 \geq 0 \iff (\alpha y-\beta x)^2 \geq 0$ που ισχύει

Ασκήσεις - Εργασία.

1) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ και $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$, να δ.ο.

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}+\frac{\delta^2}{\delta+\alpha} \geq \frac{1}{2}$$

2) Αν $x,y,w>0$ και $\lambda \geq 0$, να δ.ο

$$\frac{(x+y)^2}{x+y+\lambda w}+\frac{(y+w)^2}{y+w+\lambda x}+\frac{(w+x)^2}{w+x+\lambda y} \geq \frac{4(x+y+w)}{\lambda+2}$$

3) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon>0$, να δ.ο.

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\varepsilon}+\frac{\delta}{\varepsilon+\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha+\beta} \geq \frac{5}{2}$$

3. Εάν $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ νά δειχθῆ ὅτι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \geq \alpha+\beta-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha\beta}$$