3) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$, να δ.ο.

$$A = \frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\delta} + \frac{\gamma}{\delta+\varepsilon} + \frac{\delta}{\varepsilon+\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha+\beta} \geq \frac{5}{2}$$

$$A = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma} + \frac{\beta^2}{\beta\gamma+\beta\delta} + \frac{\gamma^2}{\gamma\delta+\gamma\varepsilon} + \frac{\delta^2}{\delta\varepsilon+\delta\alpha} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon} \overset{\text{Adr.}}{\geq}$$

θ.δ.ο.

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\delta+\beta\varepsilon+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon} \geq \frac{5}{2} \iff$$

$$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)^2 \geq 5\alpha\beta+5\alpha\gamma+5\alpha\delta+5\alpha\varepsilon+5\beta\gamma+5\beta\delta+5\beta\varepsilon+5\gamma\delta+5\gamma\varepsilon+5\delta\varepsilon \iff$$

$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\alpha\varepsilon+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\beta\varepsilon+2\gamma\delta+2\delta\varepsilon) \geq 5(\underbrace{\alpha\beta+\alpha\gamma+\dots+}_{A}) \iff$$

$$2[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+2\cdot A] \geq 5A \iff 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)+4A \geq 5A \iff$$

$$\boxed{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2) \geq A}$$

Αρκεί ν.δ.ο. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha$ (1)

και θ.δ.ο. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2 \geq \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\delta+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon$ (2)

Απόδειξη της (1) πολλ/ζω επί 2 και φέρνω όλα στο 1ο μέλος:

(1) $\iff 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+2\delta^2+2\varepsilon^2 \geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\delta+2\delta\varepsilon+2\varepsilon\alpha \iff$

$$\underbrace{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}+\underbrace{\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2}+\underbrace{\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2}+\underbrace{\delta^2-2\delta\varepsilon+\varepsilon^2}+\underbrace{\varepsilon^2-2\varepsilon\alpha+\alpha^2} \geq 0$$

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\delta)^2+(\delta-\varepsilon)^2+(\varepsilon-\alpha)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

Διαιρετότητα ακεραίων αριθμών.

Γνωρίζουμε ότι αν δίνονται 2 φυσικοί αριθμοί α, β τότε μπορούμε να βρούμε 2 μοναδικούς φυσικούς π, υ τέτοιοι ώστε

$\alpha = \beta\cdot\pi+\upsilon$ και $0 \leq \upsilon < \beta$ [Ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης].

Π.χ. $\alpha = 152$, $\beta = 7$

$152 \mid 7$, 12, 21, 5 $\quad 152 = 7\cdot 21+5 \quad 0 \leq 5 < 7$

1η εφαρμογή: Έστω α φυσικός αριθμός $\alpha = 2\cdot\pi+\upsilon$ $\quad 0 \leq \upsilon < 2$

Δηλ. $\upsilon = 0, 1$ $\quad \alpha = 2\pi \to$ ονομάζεται άρτιος, $\alpha = 2\pi+1 \to$ » περιττός. $\quad$ $\alpha = 2k$, $\alpha = 2\mu$, $\alpha = 2\lambda$, $\alpha = 2\rho$

2η εφαρμογή: Το τετράγωνο ενός αρτίου είναι άρτιος.

Πράγματι αν $\alpha = 2k \Rightarrow \alpha^2 = (2k)^2 = 4\cdot k^2 = 2\cdot(2k^2) = 2\lambda =$ άρτιος

3η εφαρμογή: Το τετράγωνο ενός περιττού είναι περιττός.

Απόδειξη: αν $\alpha = 2k+1 \Rightarrow \alpha^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\cdot(\underbrace{2k^2+2k}_{\lambda})+1 = 2\lambda+1$ περιττός

4η εφαρμογή: Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός φυσικού αριθμού α δια 3 είναι: 0, 1, 2

Δηλ. $\alpha = 3k$, $\alpha = 3k+1$, $\alpha = 3k+2$. $k \in \mathbb{N} \leftarrow$ το σύνολο των φυσικών αριθμών (ανήκει)

5η εφαρμογή: Ποιά είναι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης $\alpha^2 : 3$ (?)

Λύση 1η περ. αν $\alpha = 3k \Rightarrow \alpha^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3\cdot(3k^2) = 3\lambda$

άρα $\alpha^2 = 3\lambda \Rightarrow$ το $\upsilon[\alpha^2:3] = 0$

2η περ. αν $\alpha = 3k+1 \Rightarrow \alpha^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(\underbrace{3k^2+2k}_{\lambda})+1 = 3\lambda+1$

άρα $\alpha^2 = 3\lambda+1 \Rightarrow \upsilon[\alpha^2:3] = 1$

3η περ. αν $\alpha = 3k+2 \Rightarrow \alpha^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(\underbrace{3k^2+4k}_{\lambda})+4 = 3\lambda+4$

άρα $\alpha^2 = 3\lambda+4 = 3\lambda+3+1 = 3(\lambda+1)+1 = 3\mu+1$.

άρα $\alpha^2 = 3\mu+1 \Rightarrow \upsilon[\alpha^2:3] = 1$

Τελικά αν διαιρέσουμε το τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού δια 3, τα δυνατά υπόλοιπα είναι 0 ή 1.

Παράδειγμα: Να εξετάσετε αν ο αριθμός 513.722 είναι τετράγωνο ακεραίου.

Λύση: προσθέτω τα ψηφία του: $\overbrace{5+1+3+7+2+2} = 20 = 3\cdot 6+2$

δηλ. ο αριθμός 513.722 αν διαιρεθεί με το 3, αφήνει υπόλοιπο 2.

Άρα δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

$513.722 \mid 3$, 2

Παράδειγμα: Δίνονται 2 φυσικοί αριθμοί α, β. Να δείξετε ότι η ποσότητα $\alpha^2+\beta^2$ διαιρείται με το 3 αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β διαιρούνται ακριβώς με το 3.

Απόδειξη: Αν $\alpha = 3k$, $\beta = 3\lambda$ [δηλ. και οι δύο διαιρούνται με το 3]

Τότε $\alpha^2+\beta^2 = (3k)^2+(3\lambda)^2 = 9k^2+9\lambda^2 = 3(\underbrace{3k^2+3\lambda^2}_{\rho}) = 3\rho$

δηλ. το $\alpha^2+\beta^2$ διαιρείται με το 3.

Αντιστρόφως: έστω ότι το $\alpha^2+\beta^2$ διαιρείται δια 3.

Έστω $\alpha = 3k+\upsilon_1$, $\beta = 3\lambda+\upsilon_2$.

Τότε $\alpha^2 \begin{cases} 3\pi \\ 3\pi+1 \end{cases}$ $\quad \beta^2 = \begin{cases} 3\varphi \\ 3\varphi+1 \end{cases}$

$\beta^2 \backslash \alpha^2$	3π	$3\pi+1$
3φ	$3(\pi+\varphi)$	$3(\pi+\varphi)+1$
$3\varphi+1$	$3(\pi+\varphi)+1$	$3(\pi+\varphi)+2$

Από τις 4 περιπτώσεις, μόνο σε μια είναι η ποσότητα $\alpha^2+\beta^2$ πολλαπλάσιο του 3. Που συμβαίνει όταν $\alpha^2 = 3\pi \iff \alpha =$ πολ.3 και $\beta^2 = 3\varphi \iff \beta =$ πολ.3. ο.ε.δ.

Σημαντικό λήμμα: Το γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων είναι πολ.2.

Αποδ. διαδοχικοί ακέραιοι $\alpha, \alpha+1$

1η περ. αν $\alpha =$ περιττός $\Rightarrow \alpha+1$ άρτιος $\Rightarrow \alpha\cdot(\alpha+1) =$ άρτιος

2η περ. αν $\alpha =$ άρτιος $\Rightarrow \alpha+1$ περιττός $\Rightarrow \alpha\cdot(\alpha+1) =$ άρτιος

Πρόταση: Το τετράγωνο ενός περιττού είναι της μορφής $8\lambda+1$.

Απόδειξη: Έστω α περιττός $\Rightarrow \alpha = 2k+1$

$\alpha^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k\cdot(k+1)+1 = 4\cdot 2\lambda+1 = \boxed{8\lambda+1}$

Το $k\cdot(k+1) =$ γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων $\Rightarrow k\cdot(k+1) = 2\lambda$

Παράδειγμα: $5^2 = 25$ $\quad 25 \mid 8$, 3, $1 \Rightarrow$

$13^2 = 169$ $\quad 169 \mid 8$, 21, $= 9$, 1

Άσκηση: Αν α, β περιττοί ακέραιοι, να δ.ο. η ποσότητα $A = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{8}$ είναι ακέραιος.

Λύση: Αφού α περιττός $\Rightarrow \alpha^2$ της μορφής $\alpha^2 = 8\lambda+1$

» β » $\Rightarrow \beta^2$ » » $\beta^2 = 8\rho+1$

$$A = \frac{\alpha^2-\beta^2}{8} = \frac{8\lambda+1-(8\rho+1)}{8} = \frac{8\lambda+\cancel{1}-8\rho-\cancel{1}}{8} = \frac{\cancel{8}(\lambda-\rho)}{\cancel{8}} \text{ ακέραιος.}$$