

Α6κ.3 / Σελ. 149 / Σχ. βιβλίου

Αν $11 \mid a+2$ και $11 \mid 35-b$ τότε $11 \mid a+b$.

Λύση $\left. \begin{array}{l} 11 \mid a+2 \\ 11 \mid 35-b \end{array} \right\} \Rightarrow 11 \mid (a+2) - (35-b) \Leftrightarrow$
 $11 \mid a+2-35+b \Leftrightarrow 11 \mid a+b-33 \Rightarrow 11 \mid a+b-33+33$
όπως $11 \mid 33 \Rightarrow 11 \mid a+b$
ο.ε.δ.

Α6κ.5 / Σελ. 149 / Σχ. βιβλίου

Αν $m \mid a$ και $m > 1$, τότε $m \nmid a+1$ ^{δεν} διαίρεται.

Απόδειξη Θα ερμηνεύσουμε την αναγωγή σε άνω.

'Έστω $\left. \begin{array}{l} m \mid a+1 \\ \text{έχω } m \mid a \end{array} \right\} \Rightarrow m \mid a+1-a \Leftrightarrow m \mid 1 \Leftrightarrow |m| \leq |1| \Leftrightarrow$
 $m \leq 1$ άνω διότι έχω $m > 1$

Άρα $m \nmid a+1$.

Α6κ.1-Β'ομ / Σελ. 150 / Σ.β.

Αν a περιττός $\Rightarrow a^2 = 4\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$. επίσης ν.δ.ο. $32 \mid (a^2+3)(a^2+7)$.

Απόδειξη Ξέρουμε ότι αν a περιττός $\Rightarrow a^2 = 8k+1 = 4 \cdot (2k) + 1$
Τέτοιον $a^2 = 4\lambda + 1$.

$$a^2+3 = 4\lambda+1+3 = 4\lambda+4 = 4(\lambda+1) = 4\varphi.$$

$$\text{επομένως } a^2 = 8k+1 \Rightarrow a^2+7 = 8k+1+7 = 8k+8 = 8(k+1) = 8\chi$$

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} a^2+3 = 4\varphi \\ a^2+7 = 8\chi \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2+3)(a^2+7) = 32\varphi\chi \Rightarrow$$

 $32 \mid (a^2+3)(a^2+7) \text{ ο.ε.δ.}$

α6κ.6-Β'ομ / Σ.150 / Σ.β.

(i) Ν.δ.ο. $3 \mid v^3+2v$ για κάθε v φυσικό

Απόδειξη Αν θεωρήσω m διαίρεση $v \mid \frac{3}{k}$ $v \in \{0,1,2\}$

1η περίπτωση Αν $v = 3k$. $v^3+2v = (3k)^3+2 \cdot 3k = 27k^3+6k = 3(9k^3+2k) = 3\varphi$

Άρα $3 \mid v^3+2v$

2η περίπτωση Αν $v = 3k+1$. $v^3+2v = (3k+1)^3+2(3k+1) =$

$$= (3k)^3 + 3(3k)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3k \cdot 1^2 + 1^3 + 6k + 2 =$$

$$= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 6k + 2 = 27k^3 + 27k^2 + 15k + 3 =$$

$$= 3 \cdot (9k^3 + 9k^2 + 5k + 1) = 3\varphi \Rightarrow 3 \mid v^3+2v$$

3η περίπτωση Αν $v = 3k+2$. $v^3+2v = (3k+2)^3+2(3k+2) = \dots$
ταυτότητα.

Απόδειξη: Αν $\frac{3 \mid a+1}{\gamma}$ ν.δ.ο. $\frac{3 \mid 4+7a}{\Sigma}$

Απόδειξη: αφού $3 \mid a+1 \Rightarrow 3 \mid 7(a+1) \Leftrightarrow 3 \mid 7a+7 \Rightarrow 3 \mid 7a+7-3$
όπως $3 \mid 3 \Rightarrow 3 \mid 7a+4$
ο.ε.δ.

Θεώρημα: Μια εξίσωση $ax^2+bx+\gamma=0$ με $a,b,\gamma \in \mathbb{Z}$

έχει ακέραια ρίζα $p \Leftrightarrow p \mid \gamma$ [το p διαίρει των συντελεστών]

Απόδειξη: Αφού $p \mid \gamma$ με εξίσωσης $\Rightarrow$

$$ap^2+bp+\gamma=0 \Leftrightarrow ap^2+bp=-\gamma \Leftrightarrow p \cdot (ap+b) = -\gamma$$

$$\text{όπως } p \mid p(ap+b) \Rightarrow p \mid -\gamma \Rightarrow p \mid \gamma. \text{ ο.ε.δ.}$$

Εφαρμογές: εξίσωση $x^2+5x+6=0$. Να εξετάσουμε αν έχει ακέραιες ρίζες.

Λύση Αν έχει ακέραια ρίζα p τότε $p \mid 6 \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Δοκιμή: $1^2+5 \cdot 1+6=0 \Leftrightarrow 1+5+6=0$ οχι

δεν ξαναδοκιμάζω γιατί.

Δοκιμή το -1 : $(-1)^2+5 \cdot (-1)+6=0 \Leftrightarrow 1-5+6=0 \Leftrightarrow 2=0$ οχι

$\gg$ το -2 : $(-2)^2+5 \cdot (-2)+6=0 \Leftrightarrow 4-10+6=0 \Leftrightarrow 0=0$ ναι

$\gg$ το -3 : $(-3)^2+5 \cdot (-3)+6=0 \Leftrightarrow 9-15+6=0 \Leftrightarrow 0=0$ ναι

Α6κ.6β.

1) Αν $11 \mid a+2$ και $11 \mid 46-b$, να δ.ο. $11 \mid a+b$

2) Αν δ θετικός ακέραιος με $\delta \mid 2v+3$ και $\delta \mid 4v+5$, να βρείτε τις πιθανές τιμές του δ .

3) Με την πληροφορία ότι οι ακέραιοι αριθμοί a, b είναι μηκύτερα του 3 και η εξίσωση $ax^2+bx+1=0$ έχει ακέραια ρίζα, να βρείτε τα a και b .

4) Αν a, b, γ ακέραιοι, να δείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις ποσότητες $a+b, b+\gamma, \gamma+a$ διαιρείται με το 2.

5) Αν $3 \nmid a$, να βρείτε τα δυο ή τρία υπολοίπων της διαίρεσης του a^2 δια 3.