

1) Αν $11|a+2$ και $11|46-b$, να δ.ο. $11|a+b$

Τι βυθώνω $a|b$; $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: b=k \cdot a$.

$a|b \Leftrightarrow b = \text{πολ.} \cdot a \Leftrightarrow \text{το } b \text{ διαιρείται από το } a \text{ (α.κ.) } \vee [b:a] = 0$.

Ιδιότητες της διαιρετότητας:

1) Αν $a|b$ και $b|x \Rightarrow a|x$ [μεταβατική]

2) Αν $a|b$ τότε $a|k \cdot b$

3) Αν $a|b$ και $a|x \Rightarrow a|b+x, a|b-x, a|kbt+x$ $k, x \in \mathbb{Z}$

4) Αν $a|b$ τότε $|a| \leq |b|$

1) Αν $11|a+2$ και $11|46-b$, να δ.ο. $11|a+b$

$$11|a+2 \Rightarrow 11|a+2-(46-b) \Rightarrow 11|a+2-46+b \Rightarrow$$

$$11|46-b \Rightarrow 11|a+b-44 \Rightarrow 11|a+b \text{ ο.ε.δ.}$$

Επίσης $11|44$

2) Αν ο θετικός ακέραιος $b \in \mathbb{N}$ διαιρείται $2v+3$ και $4v+5$, να βρείτε τις πιθανές τιμές του b .

$$\text{Έχω } \left. \begin{array}{l} b|2v+3 \Rightarrow b|4v+6 \\ b|4v+5 \Rightarrow b|4v+5 \end{array} \right\} \Rightarrow b|4v+6-(4v+5) \Rightarrow$$

$$b|1 \Rightarrow b = \pm 1$$

3) Με την πληροφορία ότι οι ακέραιοι αριθμοί a, b είναι ^{απόλυτοι} $a, b \in \mathbb{Z}$ και η εξίσωση $ax^2+bx+1=0$ έχει ακέραια ρίζες, να βρείτε τα a και b .

Βασική πρόταση: Αν μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, έχει ακέραια ρίζες p, q , τότε το p διαιρεί τον σταθερό όρο.

Εξίσωση: $ax^2+bx+1=0$ με $a, b, x, d \in \mathbb{Z} \leftarrow \{\text{όμοιοι ακέραιοι}\}$

και έχει ακέραια ρίζες p, q , τότε $p|d$.

Από την εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές και έχει ακέραια ρίζες p, q

τότε $p|1 \Rightarrow p = \pm 1$.

Στη περίπτωση: $p = \pm 1 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a+b+1=0 \Leftrightarrow a+b=-1$

$|a| < 3 \Leftrightarrow a \in \{\pm 1, \pm 2, 0\}$. $a \neq 0$ για να είναι δευροβάθμια η εξίσωση.

αν $a = 1 \Rightarrow a+b = -1 \Leftrightarrow 1+b = -1 \Leftrightarrow b = -2$ δυνάμει $|-2| < 3$

αν $a = -1 \Rightarrow -1+b = -1 \Leftrightarrow b = 0$ δυνάμει

αν $a = 2 \Rightarrow 2+b = -1 \Leftrightarrow b = -3$ όπως $|b| = |-3| = 3$ άρα.

αν $a = -2 \Rightarrow -2+b = -1 \Leftrightarrow b = 1$ δυνάμει. Ομοίως εξετάζω και $p = -1$

Άρα οι πιθανές εξισώσεις: $x^2-2x+1=0$,

$-x^2+0x+1=0$ και $-x^2+1=0$, $-2x^2+x+1=0$.

Εφαρμογές των παραπάνω θεωρημάτων.

Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης: $x^3-3x^2+x+2=0$. (1)

Λύση: Αν p ακέραια ρίζα της (1) $\Rightarrow p|2 \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Για $p = 1$: $1^3-3 \cdot 1^2+1+2 = 1-3+1+2 = 1 \neq 0$ οχι

Για $p = -1$: $(-1)^3-3 \cdot (-1)^2+(-1)+2 = -1-3-1+2 = -3 \neq 0$

4) Αν a, b, x ακέραιοι, να δείξετε ότι μια τριωνυμική

από τις ποσότητες $a+b, b+x, x+a$ διαιρείται με το 2.

Λύση: Μπορεί να $a=2k$ ή $a=2k+1$

ομοίως $b=2\lambda$ ή $b=2\lambda+1$, $x=2\mu$ ή $x=2\mu+1$.

Αν οι αριθμοί a, b είναι και οι 2 άρτοι ή

και και οι δύο περιττοί τότε $a+b$ άρτος.

Αν οι αριθμοί a, b είναι ο ένας άρτος και ο άλλος περιττός

π.χ. $a=2k$, $b=2\lambda+1$

Τότε εξετάζω τον x . Αν $x=2\mu+1 \Rightarrow b+x$ άρτος.

Αν $x=2\mu$, τότε $a+x$ άρτος. Σε κάθε περίπτωση, κάποια από

αυτές τις ποσότητες είναι άρτος.

5) Αν $3|a$, να βρείτε τα δυνατά υπολοίπα της διαίρεσης του a^2 δια 3.

Λύση: Αφού $3|a \Rightarrow a=3k$ ή $a=3k+1$ ή $a=3k+2$

$$\left. \begin{array}{l} a|3 \\ v|k \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=3k+v \\ a^2=(3k+v)^2=9k^2+6kv+v^2=3(3k^2+2kv)+v^2 \end{array}$$

$$\text{Άρα } v[a^2:3] = 1$$

$$\text{αν } a=3k+2 \Rightarrow a^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1=3\lambda+1. \text{ Άρα } v[a^2:3]=1.$$

Μια νέα ταυτότητα: [Διαφορά κύβων]

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

και το αντίστροφο κύβων:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Απόδειξη: b' κείλος: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$$a^3+\cancel{ab^2}+a^2b-\cancel{ab^2}-\cancel{ab^2}-b^3=a^3-b^3=a' \text{ κείλος.}$$

Στη ταυτότητα: b' κείλος: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=\dots = a' \text{ κείλος.}$

Να παρατηρήσουμε ότι τα πολυώνυμα

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$$

Να δείξετε ότι $15|16^3-1$.

$$\text{Αποδ. } 16^3-1=16^3-1^3=(16-1)(16^2+16 \cdot 1+1)=15 \cdot A = \text{πολ.} \cdot 15$$

Άρα $15|16^3-1$.

Ταυτότητες δυωνύμων μεγαλύτερων εκθετών:

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

$$a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$$

Απόδειξη: b' κείλος: $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=$

$$a^4+\cancel{a^3b}+\cancel{a^2b^2}+\cancel{ab^3}-\cancel{a^3b}-\cancel{a^2b^2}-\cancel{ab^3}-b^4=a^4-b^4=a' \text{ κείλος.}$$

Η γενική ταυτότητα:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$$

Αξιωματικό: Να δείξετε ότι $16|17^n-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ^{φυσικοί αριθμοί}

$$\text{Απόδειξη: } 17^n-1=17^n-1^{\text{φυσικός}}=(17-1)(17^{n-1}+17^{n-2}+17^{n-3}+\dots+1)=16A=\text{πολ.} \cdot 16$$

Άρα $16|17^n-1$

Αξιωματικό: Να δείξετε ότι $(17^3-1)|(17^{15}-1)$.

$$\text{Απόδειξη: } 17^{15}-1=(17^3)^5-1^5=(17^3-1)(17^{12}+17^9+17^6+17^3+1)=$$

$$\text{Μορφή } a^5-b^5 = (a^3-b^3)A = (17^3-1)A = \text{πολ.} \cdot (17^3-1)$$

Άρα $17^3-1|17^{15}-1$