1) Αν διαιρέσουμε τον ακέραιο α με το 15, βρίσκουμε υπόλοιπο 12. Τι υπόλοιπο θα βρούμε αν διαιρέσουμε τον α με το 5;

Λύση: $\begin{array}{l|l} a & 15 \\ \hline & n \\ 12 & \end{array} \Rightarrow a = 15n + 12 \Leftrightarrow$

$a = 5\cdot(3n) + 12 \Leftrightarrow$

$a = \underbrace{5(3n)}_{} + 10 + 2 \Leftrightarrow$

$a = 5\cdot\underbrace{(3n+2)}_{k} + 2 \Leftrightarrow \boxed{a = 5k+2}$

$\begin{array}{l|l} a & 5 \\ \hline v & k \end{array}$ $v \in \{0,1,2,3,4\}$ $\boxed{a = 5k+v}$

Άρα το α, αν το διαιρέσουμε με το 5 θα πάρω υπόλοιπο 2.

Ερώτηση: Για τον αριθμό α της προηγούμενης εκφώνησης, αν τον διαιρέσουμε με το 3, τι υπόλοιπο θα πάρω;

Λύση: Ξέρω: $a = 15n + 12 = 3\cdot(5n) + 12 = 3\cdot\underbrace{(5n+4)}_{k} = 3k \Leftrightarrow a = 3k$.

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $[a:3]$ είναι το 0.

2) Αν για τους φυσικούς αριθμούς α, β ισχύει η εξίσωση $3a - 2b = 2025$, να δ.ο. ο αριθμός $A = \frac{a^2+7}{8}$ είναι φυσικός

Λύση: $3a = \underbrace{2025}_{\text{περιττός}} + \underbrace{2b}_{\text{άρτιος}} =$ περιττός.

Άρα $3a =$ περιττός. Διερεύνηση: αν α άρτιος $\Rightarrow 3a$ άρτιος. άτοπο.

Άρα α περιττός. $\Rightarrow a = 2k+1$.

από το προηγούμενο πρόβλημα $\Rightarrow a^2 = 8\lambda+1$.

$A = \frac{a^2+7}{8} = \frac{8\lambda+1+7}{8} = \frac{8\lambda+8}{8} = \lambda+1$ ακέραιος

3) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y για να ικανοποιούν τη εξίσωση $x^2 + 4y = 2027$.

Λύση: Αν x, y ακέραιοι τότε x άρτιος ή x περιττός.

1η περ. Αν x άρτιος $\Rightarrow x = 2k \Rightarrow x^2 = 4k^2 \Rightarrow$

$x^2 + 4y = 4k^2 + 4y = 4(k^2+y) = 4\lambda$ άτοπο διότι το 2029 $\neq$ πολ. 4

2η περ. Αν x περιττός $\Rightarrow x = 2k+1 \Rightarrow x^2 = 8\lambda+1$.

$x^2 + 4y = 8\lambda + 1 + 4y = 4\cdot\underbrace{(2\lambda+y)}_{k} + 1 = 4k+1$.

Άρα αν διαιρέσουν το x^2+4y με το 4, παίρνω υπόλοιπο 1.

$\begin{array}{l|l} 2027 & 4 \\ \hline =27 & 506 \\ & =3 \end{array}$ δηλ. το $v = 3$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση $x^2+4y = 2027$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Σκέψη: Τι θα συνέβαινε αν αφήναμε και με το y.

$x^2 \backslash y$	άρτιος	περιττός
άρτιος	×	
περιττός		

$x^2 + 4y = 2027$

$\boxed{1\text{η}}$ $x = 2k, \quad y = 2\lambda$

$x^2 + 4y = 4k + 4\cdot 2\lambda = 4\cdot(k+2\lambda) =$ πολ. 4

άτοπο $2027 \neq$ πολ. 4 $\Leftrightarrow$ άτοπο

$\boxed{2\text{η}}$ $x = 2k, \quad y = 2\lambda+1 \Rightarrow \ldots\ldots$

4) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y για να ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 + y^2 + x + y = 2025$

Λύση: $\underbrace{x\cdot(x+1)}_{\text{άρτιος}} + \underbrace{y(y+1)}_{\text{άρτιος}} = 2025 \Leftrightarrow$ άρτιος = περιττός

Άτοπο.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Σημαντική παρατήρηση: Το γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

$\boxed{2\text{ο}}$ Το γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος

$\boxed{3\text{ο}}$ — " — 3 — " — — " — είναι πολ. 3.

Δίνω α·(α+1)·(α+2), ένας τουλάχιστον θα είναι πολ. 3.

$\boxed{4\text{ο}}$ Το γινόμενο 3 διαδοχικών ακεραίων θα είναι πολ. 6.

Διαιρετότητα.

Ορισμός: Θα λέμε ότι ο ακέραιος αριθμός α το διαιρεί τον ακέραιο β (συμβολίζω $a|b$) $\Leftrightarrow$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $b = k\cdot a$.

ακέραιος

$\mathbb{Z}$: το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

"$\in$": "ανήκει" $\quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ η κ ανήκει στους ακέραιους

"$\exists$": "υπάρχει".

Παραδ.) $2|8$ (διότι $8 = 2\cdot 4$) $\qquad -3|9$ $\left(\text{διότι } 9 = -3\cdot\overset{k}{(-3)}\right)$

$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ ώστε $b = k\cdot a$.

Λάθος $2|0$ (διότι: $0 = 2\cdot 0$).

Προσοχή δεν μπορώ να πω ότι $0|a$.

Μπορώ να πω ότι $a|0$

Παρατηρήσεις: 1) Αν $a|b$ τότε α λέγεται διαιρέτης του β ή παράγοντας του β. Το β λέγεται πολλαπλάσιο του α.

Λέμε επίσης ότι το β διαιρείται με το α.

Το α διαιρεί το β. $2|8$. $8 = 2\cdot 4$

παράγοντας του 8.

Ιδιότητες.

1) Αν $a|b \Rightarrow \overbrace{a|k\cdot b}$ [για πολ. β].

Αποδ) Αφού $a|b \Rightarrow b = \lambda\cdot a \Leftrightarrow kb = k\lambda\cdot a \Leftrightarrow kb = \underbrace{(k\lambda)}_{\mu}\cdot a = \mu\cdot a$

δηλ. $kb = \mu a \Rightarrow a|kb$.

2) Αν $a|b \Rightarrow ka|kb$.

3) Αν $a|b$ και $a|\gamma \Rightarrow a|b+\gamma$, $a|b-\gamma$, $a|kb+\lambda\gamma$

γραμμικός συνδυασμός των β, γ

Αποδ) Αφού $\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = ka \\ a|\gamma \Rightarrow \gamma = \lambda a \end{array}\right\} \Rightarrow b+\gamma = ka + \lambda a \Leftrightarrow$

$b+\gamma = \underbrace{(k+\lambda)}_{\mu}\cdot a \Leftrightarrow b+\gamma = \mu\cdot a \Rightarrow a|b+\gamma$.

ακόμη $\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|kb \\ a|\gamma \Rightarrow a|\lambda\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a|kb+\lambda\gamma}$

παραδ.) $\left.\begin{array}{l} a|b \\ a|\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow a|2b+3\gamma$, $a|-2b+3\gamma$. $a|5b-\gamma$

4) Αν $a|b$ και $b \neq 0$ τότε $|a| \leq |b|$

Απόδειξη: Αφού $a|b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ ώστε $b = k\cdot a \Rightarrow |b| = |k a| \Leftrightarrow$

$|b| = |k|\cdot|a|$ (1)

όμως αν $k = 0$ τότε $|b| = 0\cdot a = 0$ άτοπο.

Άρα $k \neq 0 \Rightarrow |k| \geq 1 \Rightarrow |k|\cdot|a| \geq |a| \Leftrightarrow |b| \geq |a|$

Εφαρμογή: $3|-6$ [διότι $-6 = 3\cdot(-2)$]

$\Rightarrow |3| \leq |-6| = 6$.

Εφαρμογή 1 / Σελ. 148 / Εκ. 6 βιβλίου Β' Λυκείου (προσαναλυτικού)

Αν $5|2a+1$, $5|3a-1 \Rightarrow 5 = ;$

Λύση: $\left.\begin{array}{l} \text{Αφού } 5|2a+1 \Rightarrow 5|3(2a+1) \Rightarrow 5|6a+3 \\ \text{Αφού } 5|3a-1 \Rightarrow 5|2(3a-1) \Leftrightarrow 5|6a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5|6a+3-(6a-2)$

$5|5$

Αφού $5|5 \Rightarrow 5 \in \{\pm 1, \pm 5\}$