1. Πρόβλημα 2 Θαλής 2017 Γ΄ Γυμνασίου

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το 1/3 του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

2. Πρόβλημα 1 Θαλής 2017 Α΄ Λυκείου

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

3. Πρόβλημα 3 Θαλής 2016 Γ΄ Γυμνασίου

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

4. Πρόβλημα 2 Θαλής 2014 Γ΄ Γυμνασίου

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το 1/3 από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

5. Πρόβλημα 2 Θαλής 2014 Α΄ Λυκείου

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

6. **Πρόβλημα 4 Ευκλείδης 2017 Β΄ Γυμνασίου**

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

7. **Πρόβλημα 4 Ευκλείδης 2017 Γ΄ Γυμνασίου**

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το α% της απόστασης, διαπιστώνει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

8. Πρόβλημα

Δυο φίλοι αποφάσισαν ότι είναι καλύτερα αντί να περιμένουν το τραμ, να προχωρήσουν μέχρι την επόμενη στάση. Ενώ βάδιζαν και είχαν διανύσει το ¼ της διαδρομής, είδαν το τραμ να έρχεται. Ο Α΄ γύρισε πίσω (περπατώντας με την ίδια ταχύτητα) και πρόλαβε το τραμ ακριβώς στην προηγούμενη στάση. Ο Β΄ συνέχισε την πορεία του διπλασιάζοντας την ταχύτητά του και έφτασε ταυτόχρονα με το τραμ στην επόμενη στάση. Πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η ταχύτητα του τραμ από την αρχική κοινή ταχύτητα των δύο φίλων;

9. Ένας επιχειρηματίας αγοράζει ένα χωράφι προς 6 ευρώ το τετραγωνικό μέτρο. Μετά την αγορά, διαπιστώνει ότι το χωράφι ήταν κατά 100 τετραγωνικά μέτρα μικρότερο . Παρ' όλα αυτά δεν διαμαρτύρεται, αλλά βρίσκει την ευκαιρία να πουλήσει το χωράφι (δηλώνοντας την πραγματική του επιφάνεια) προς 8 ευρώ το τετραγωνικό μέτρο και κέρδισε 12% επί των όσων είχε πληρώσει. Να βρεθεί η πραγματική επιφάνεια του χωραφιού.

10. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 12. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, προκύπτει αριθμός κατά 18 μονάδες μικρότερος. Να βρεθεί ο αριθμός.

11. Ενός διψήφιου αριθμού το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο του ψηφίου των δεκάδων. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων, προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος κατά 36 μεγαλύτερος. Να βρεθεί ο αρχικός αριθμός.

12. Ένας εργάτης Α΄ χρειάζεται να εκτελέσει ένα έργο στον μισό χρόνο από αυτόν που χρειάζεται ο εργάτης Β΄ γι' αυτό το έργο. Ο χρόνος που χρειάζεται ο Β΄ είναι τα 2/3 του χρόνου που χρειάζεται ο Γ΄. Και οι τρεις μαζί μπορούν να εκτελέσουν το έργο σε 6 ημέρες. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται ο καθένας για να εκτελέσει το έργο μόνος του.

13. Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατά 5000 ευρώ. Τοκίστηκε το μεγαλύτερο απ' αυτά με 4% και το μικρότερο με 5%. Εάν στα αρχικά κεφάλαια προστεθούν και οι αντίστοιχοι ετήσιοι τόκοι τους, προκύπτουν ίσα κεφάλαια. Να βρεθούν τα αρχικά κεφάλαια.

14. Κατέθεσε κάποιος τα 3/5 του κεφαλαίου του προς 3,5% και το υπόλοιπο προς 5%. Αν επεδίωκε ένα άλλο επενδυτικό σχέδιο και κρατούσε από το αρχικό κεφάλαιο τα 2000 ευρώ και τόκιζε το υπόλοιπο προς 4,5%, θα αύξανε τον ετήσιο τόκο του κατά 54 ευρώ. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο.

15. Ένας δρομέας έτρεξε μια απόσταση με ταχύτητα 12 χιλιομέτρων την ώρα. Αν έτρεχε με ταχύτητα 8 χιλ./ώρα θα χρειαζόταν 2 ώρες περισσότερες για να καλύψει την απόσταση αυτή. Πόση απόσταση έτρεξε;

16. Δύο φίλοι αναχωρούν ταυτόχρονα από το σημείο Α για να κάνουν έναν περίπατο 4 χιλ. Ο πρώτος βαδίζει με ταχύτητα 2,5 χιλ./ώρα και ο δεύτερος με ταχύτητα 3 χιλ./ώρα. Ο δεύτερος αφού έφτασε στο τέρμα της διαδρομής (έστω Β), ξεκινάει και επιστρέφει και συναντάει τον φίλο του. Να βρείτε που τον συνάντησε.

17. Μια αλεπού, η οποία κάνει 2 πηδήματα/δευτερόλεπτο, έχει ήδη κάνει 30, όταν ένας

σκύλος, ο οποίος κάνει 4 πηδήματα/δευτερόλεπτο αρχίζει να την καταδιώκει. Μετά από πόσα δευτερόλεπτα ό σκύλος θα φτάσει την αλεπού;

18. Ένας ορθογώνιος κήπος, του οποίου το πλάτος είναι 4/5 του μήκους του, έχει εμβαδόν 2400 τ.μ. περισσότερο από έναν άλλον του οποίου το μήκος είναι κατά 40 μ. μεγαλύτερο του μήκους του πρώτου και το πλάτος είναι κατά 40μ. μικρότερο του πλάτους του πρώτου. Να υπολογιστούν οι διαστάσεις των δύο κήπων.

19. Στην πόλη μου τα ζώα (γάτες και σκύλοι) συμπεριφέρονται παράξενα : Το 10 % από τις γάτες νομίζουν ότι είναι σκύλοι και το 10 % των σκύλων νομίζουν ότι είναι γάτες ! Κάθε μέρα το 26% όλων των ζώων της πόλης (σκύλοι και γάτες) συμπεριφέρονται σαν γάτες. Ποιο ποσοστό των ζώων είναι πραγματικές γάτες ; "

20.Ο Νίκος λέει στην Έφη: «Αν προσθέσω 70 ευρώ στα 3/5 των χρημάτων μου, θα έχω όσα χρήματα έχεις κι εσύ. Και η Έφη του απαντά «επομένως έχεις μόνο 30 ευρώ περισσότερα από μένα. Πόσα χρήματα έχει κάθε παιδί;

21. Να εξετάσετε αν υπάρχει διψήφιος φυσικός αριθμός που να ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του, ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του.

22. Σε μια βαλκανική συνάντηση νέων συμμετέχουν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον χώρα έχει στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου. (Θαλής 2001)

23. Αν διαιρέσουμε τον θετικό και περιττό ακέραιο α με το 5, παίρνουμε υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του α.

24. Δίνεται ο θετικός ακέραιος $A=\{(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\}\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος. Να βρείτε τις τιμές του ν ώστε ο Α να είναι διαιρέτης του 24.

25. Πρόβλημα 4 Θαλής 2016 Β΄ Γυμνασίου
Όλα τα ψηφία ενός θετικού ακεραίου αριθμού Α είναι ίσα με 8 ή με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά στον αριθμό. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

26. Να βρείτε τους 4 μικρότερους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται ταυτόχρονα με το 8 και το 9 και το ψηφίο των δεκάδων τους είναι το 1.

27. Να βρείτε τους 3 μικρότερους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται ταυτόχρονα με το 5 και το 9 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 20.

28. Να βρείτε τους 2 μικρότερους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται ταυτόχρονα με το 2, το 3, το 4 και το 9 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 6.

29. Να βρείτε τους 2 μικρότερους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται ταυτόχρονα με το 2, το 4 και το 9 και αποτελούνται μόνο από τα ψηφία 1, 2, 3.

30. Να βρεθούν τα ψηφία α και β , αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός γ=$\overline{199\alpha1\beta}$ διαιρείται συγχρόνως με το 5 και το 9.

31. Να βρείτε το ψηφίο χ, ώστε $\overline{12x}+\overline{13x}+\overline{15x}=\overline{41x}$.

32. Να βρείτε το ψηφίο χ, ώστε $\overline{x98}+\overline{86x}+\overline{6x9}=1678$.

33. Να βρείτε τα ψηφία α, β ώστε $\overline{\alpha\beta\alpha\beta}-\overline{\beta\alpha\beta\alpha}=7272$.

34. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς που διαιρούνται με το 3 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 18. Ποιοι από αυτούς διαιρούνται με το 6;

35. Να βρείτε όλους τους τετραψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς που διαιρούνται με το 3 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 18. Ποιοι από αυτούς διαιρούνται με το 6;

36. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς που διαιρούνται με το 5 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 75.

37. Να βρείτε όλους τους τετραψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς που διαιρούνται με το 5 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 75. Ποιοί από αυτούς διαιρούνται με το 15;

38. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς που διαιρούνται με το 15 και περιέχουν τουλάχιστον ένα ψηφίο «8». (Απ. 11 αριθμοί) Ποιοι από αυτούς διαιρούνται με το 9 και ποιοί με το 45;

39. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς που διαιρούνται με το 12 και περιέχουν τουλάχιστον ένα ψηφίο «1». Ποιοι από αυτούς διαιρούνται με το 9 και ποιοί με το 36;

1. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ.
   Α) Να δείξετε ότι ΑΓ=ΒΔ.
   Β) Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων, να δείξετε ότι ΟΓ=ΟΔ

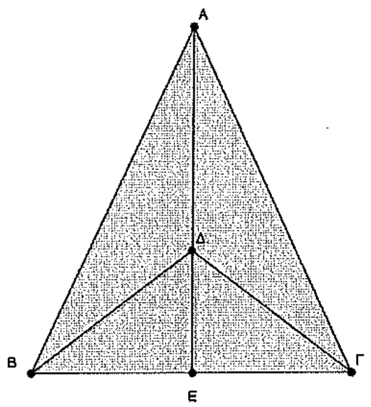
2. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και το μέσο Ε της ΓΔ.
   Α) Να δείξετε ότι ΑΕ=ΒΕ.
   Β) Αν ΔΖ, ΓΗ οι διχοτόμοι των τριγώνων $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma E}}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΔΖ=ΓΗ.

3. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΔΓ=6 cm, $\hat{\Delta}<\hat{\Gamma}$ και ΓΔ>ΒΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ, η οποία τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ στο σημείο Ε.

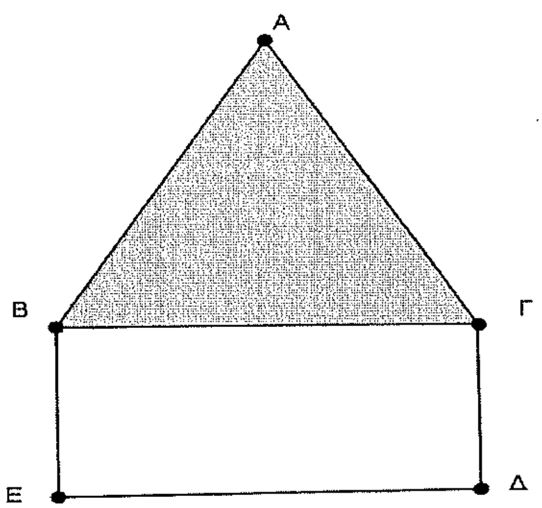
Α) Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ.
Β) Έστω Ζ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ. Φέρνουμε την ΓΖ. Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στο ΓΖ που τέμνει την προέκταση της ΕΓ στο Η. Αν η γωνία Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 60^o, να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου $\overset{\Delta}{\Delta EH}$.

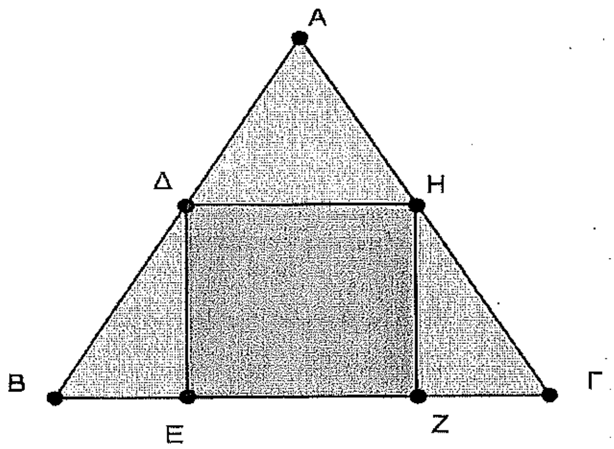
Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α , ταξιδεύει 3 Km νότια , στη συνέχεια 12 Km ανατολικά
και τέλος ξανά 2Km νότια , μέχρι που φτάνει στο λιμάνι Β.
Πόσα χιλιόμετρα απέχει το λιμάνι Α από το λιμάνι Β ;

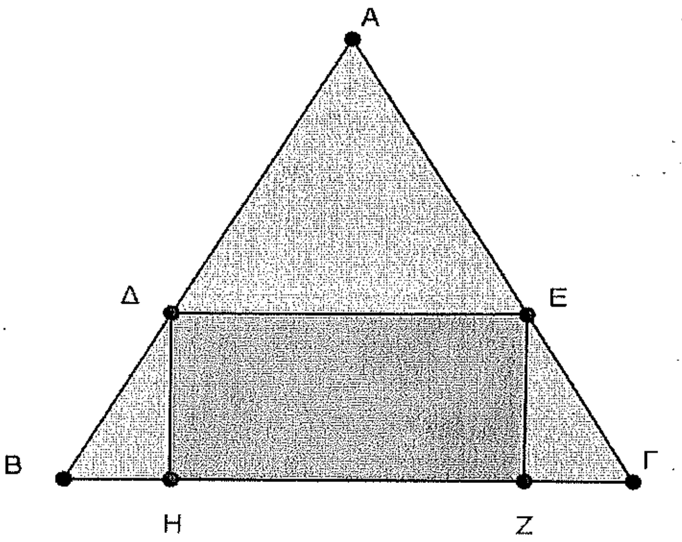
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΒΓ. Η προέκταση της ΑΔ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ.
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $\Delta\hat{B}A = A\hat{B}\Delta = 30^o$, να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.
Θαλής Β΄ Γυμνασίου 2017



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α . Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά
$$B\Delta = \frac{\alpha}{2}$$
(α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ .
(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΓΔ, ΒΕΔ, ΑΒΔ.
(γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α, τα μήκη των πλευρών ΑΔ, ΒΔ καθώς και τα μήκη των υψών του τριγώνου ΑΒΔ.
Θαλής Γ΄ Γυμνασίου 2017



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α και το ΔΕΖΗ είναι τετράγωνο πλευράς χ. **(α)** Να υπολογίσετε το ΒΕ συναρτήσει του χ και το χ συναρτήσει του α. **(β)** Να δείξετε ότι $BE = \left(2-\sqrt{3}\right)\alpha$	

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α και το ΔΕΖΗ είναι ορθογώνιο με πλευρές χ και 2χ. **(α)** Να υπολογίσετε το ΒΗ συναρτήσει του χ και το χ συναρτήσει του α. **(β)** Να δείξετε ότι $BH = \dfrac{\alpha\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$	

Μέθοδος: Στις παρακάτω ασκήσεις, πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψη οι συνθήκες με την ακόλουθη προτεραιότητα:

1. Το γινόμενο των ψηφίων 2. Η διαιρετότητα με κάποιο από τα ψηφία 2,4,8
2. Η διαιρετότητα με κάποιο από τα ψηφία 3,9
3. Αν υπάρχει ανισοτική συνθήκη για τα ψηφία, αυτή πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη μαζί με το «2».

1. Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9. Θαλής Γ΄ Γυμνασίου 2017

2. Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό.
Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α , αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3. Θαλής Β΄ Γυμνασίου 2016

3.Να βρεθεί ο ακέραιος θετικός Α, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8. Θαλής Α΄ Λυκείου 2016

4.Να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο που διαιρείται με το 36 και το γινόμενο των ψηφίων του ισούται με 36.

5.Να βρείτε τους τέσσερις μικρότερους θετικούς ακέραιους που έχουν γινόμενο ψηφίων 12 και διαιρούνται με το 36.

6.Να βρείτε τους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ που διαιρούνται με το 18.

7.Να βρείτε τους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ που διαιρούνται με το 36.

8.Να βρείτε τους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ που διαιρούνται με το 45.

9.Να βρείτε τους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\alpha\alpha\beta\beta}$ που διαιρούνται με το 36.

10.Να βρείτε τους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\alpha\alpha\beta\beta}$ που διαιρούνται με το 45.

11.Να βρείτε τους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\beta\gamma}$ με α+β+γ>20 που διαιρούνται με το 12.

12.Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=1000\alpha+100\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\dfrac{28}{\nu}$ και $\gamma=\dfrac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Θαλής Γ΄ Γυμνασίου 2015

13.Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $(x+y).z^m - w$. Θαλής Γ΄ Γυμνασίου 2015

14.Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ Γωνία 45^o και επίσης διέρχεται από το σημείο Μ(2,-6). Το σημείο Α ανήκει στον άξονα χ΄χ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα ψ΄ψ και στην ευθεία (ε).

(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ. (Θαλής 2013 Γ΄Γυμνασίου)

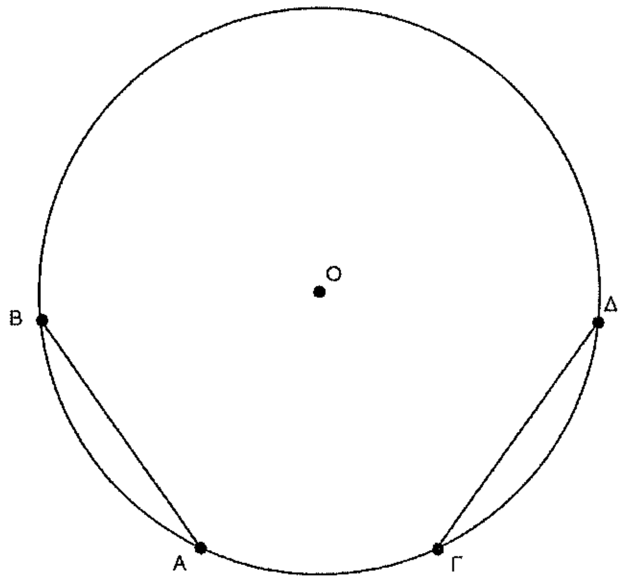
15.Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του. Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2. Θαλής Γ΄ Γυμνασίου 2014

16.Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση α%. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά β %. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α . Θαλής Β΄ Γυμνασίου 2016

Θέμα 1ο Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ.

Α) Να αποδείξετε ότι $\overset{\Delta}{MOK} = \overset{\Delta}{\mathrm{MO\Lambda}}$ β) Να αποδείξετε ότι ΜΑ=ΜΓ

γ) οι προεκτάσεις των ΟΚ, ΟΛ τέμνουν την ευθεία ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΟΕ=ΟΖ και ότι ΟΜ $\perp$ ΕΖ. (Μονάδες 10-10-20)



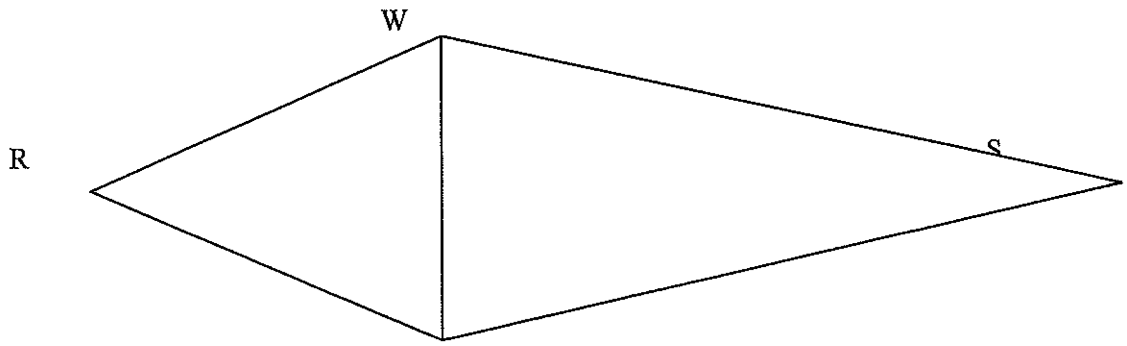
Θέμα 2ο Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ η διάμεσός του ΑΖ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά ΔΕ=ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΖ (προς το μέρος του Ζ) κατά ΖΗ=ΑΖ. Να αποδείξετε ότι:

Α) ΑΒ=ΒΕ β) ΒΕ=ΓΗ γ) ΒΗ=ΓΕ [Μονάδες 10-15-15-σχήμα-5]

Θέμα 3ο Το τετράπλευρο WRQS του παρακάτω σχήματος έχει RQ=RW και $R\hat{Q}S = R\hat{W}S$.

α. Να δείξετε ότι QS=SW β. Να δείξετε ότι $RS \perp QW$.

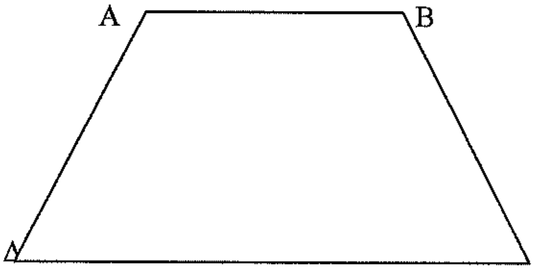
γ. Με κέντρο το R και ακτίνα RQ να γράψετε κύκλο που τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα RS στο σημείο Ε. Να πάρετε τα σημεία Ζ, Η μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων QE και WE αντιστοίχως. Να δείξετε ότι $Q\hat{R}W = 4.Q\hat{R}Z$



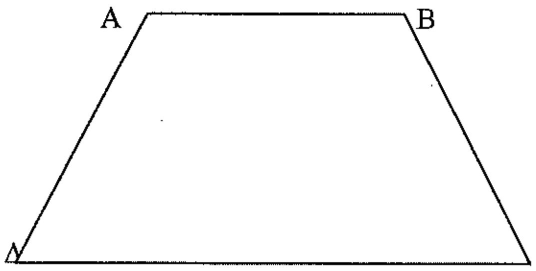
Θέμα 4° Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και οι ίσοι κύκλοι (Β,ρ) και (Γ,ρ) με $ρ<\frac{ΒΓ}{2}$. Ο κύκλος (Β,ρ) τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ στα σημεία Ε, Δ αντίστοιχα και ο κύκλος (Γ,ρ) τέμνει τις ΓΒ, ΓΑ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
α. ΔΕ=ΖΗ β. Αν $ΒΘ \perp ΔΕ$ και $ΓΙ \perp ΖΗ$, να δείξετε ότι ΒΘ=ΓΙ.

Θέμα 5° Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ και $\hat{Γ}=\hat{Δ}$. Να δείξετε ότι:

α. ΑΓ=ΒΔ β. $\hat{A}=\hat{B}$
γ. Οι πλευρές ΔΑ, ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Σ και οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Κ. Αν Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα σημεία Σ, Ε, Ζ, Κ είναι συνευθειακά.



Θέμα 6° Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{Γ}=\hat{Δ}$. Δίνονται και οι ίσοι κύκλοι (Γ, ρ) και (Δ, ρ) με $ρ<\frac{ΓΔ}{2}$. Ο κύκλος (Γ,ρ) τέμνει τις πλευρές ΒΓ, ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ενώ ο κύκλος (Δ,ρ) τέμνει τις πλευρές ΓΔ, ΔΑ στα σημεία Η και Θ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: α. ΘΗ=ΖΕ
β. Φέρνουμε τα αποστήματα ΓΙ και ΔΚ των χορδών ΖΕ και ΘΗ αντίστοιχα, τα οποία προεκτεινόμενα τέμνονται στο σημείο Λ. Να δείξετε ότι ΛΓ=ΛΔ
γ. Αν επιπλέον ,οι χορδές ΕΖ και ΘΗ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Μ και οι πλευρές ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ν, να δείξετε ότι τα σημεία Μ, Λ, Ν και το μέσο Ο της ΓΔ είναι συνευθειακά.



Θέμα 7° Έστω ότι ο κύκλος (Ο,ρ) εφάπτεται των πλευρών ΡΒ, ΓΕ, ΡΕ του τριγώνου $\overset{\Delta}{ΡΓΕ}$, στα σημεία Α, Δ και Β αντίστοιχα.
Α) Να αποδείξετε ότι: I) ΡΓ=ΓΔ+ΑΡ
ii) ΡΓ-ΓΔ=ΡΕ-ΔΕ

Β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να δείξετε ότι: I) το $\overset{\Delta}{ΡΓΕ}$ είναι ισοσκελές
ii) τα σημεία Ρ, Ο, Δ είναι συνευθειακά

iii) Αν επιπλέον, τα σημεία Γ, Ο, Β είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι το $\overset{\Delta}{ΡΓΕ}$ είναι ισόπλευρο.

Θέμα 8° Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ με μήκος (ΚΛ)=10 cm και οι κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) όπου ρ=3cm. Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από το μέσο Μ του ΚΛ και εφάπτεται στους δυο κύκλους, στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
Γ1. Να δείξετε ότι ΜΑ=ΜΒ.

Γ2. Θεωρούμε και τους κύκλους (Κ,R) και (Λ,R), όπου R=4 cm, οι οποίοι τέμνουν την ε στα σημεία Γ και Δ ο (Κ,R) και στα σημεία Ε και Ζ ο (Λ,R). Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΓΔ και ΛΕΖ είναι ίσα.

Θέμα 9ο Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ένα σημείο Κ στο εσωτερικό του. Με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΑ γράφουμε κύκλο που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Φέρνουμε τις ΚΒ, ΚΓ και τις προεκτείνουμε κατά ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να δείξετε ότι:
Α) τριγ.ΑΒΔ=τριγ.ΑΕΓ Β) η ΑΚ είναι μεσοκάθετος της ΔΕ.
Γ) Αν προεκτείνουμε την ΑΚ, τέμνει την ΔΕ στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι ΜΒ=ΜΓ.

Θέμα 10ο Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΒΔ και ΓΕ με ΒΔ=ΓΕ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΕ προς το μέρος του Ε κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ. Μετά το προεκτείνουμε προς το μέρος του Δ κατά τμήμα ΔΗ=ΔΕ. Να δείξετε ότι:
Α)το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. Β) τριγ.ΑΖΕ=τριγ.ΑΗΔ.
Γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Θέμα 11ο Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος του και ΑΕ το ύψος του. Ν' αποδείξετε ότι Γων.ΕΑΔ=
$$\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$$

Θέμα 12ο Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ αμβλείες, οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται στο Ε. α) Να δείξετε ότι $A\hat{E}\Delta = \dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$.
Β) Να εξετάσετε αν η γωνία ΑΕΔ μπορεί να γίνει αμβλεία.

Θέμα 13ο Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=α και ΓΔ=2α. Επίσης ΑΔ=ΒΓ=α. Εξωτερικά του ΑΒΓΔ γράφουμε τα τετράγωνα ΑΔΕΖ, ΑΒΗΘ και ΒΓΙΚ.
Α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
Β) Να δείξετε ότι με κέντρο το μέσο Ο της ΓΔ, υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές Ε, Ζ, Θ, Η, Κ, Ι. Να υπολογιστεί η ακτίνα του εν λόγω κύκλου συναρτήσει του α.
Γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Α, Γ είναι συνευθειακά.
Δ) Να δείξετε ότι οι μεσοκάθετοι των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΑ, ΖΘ, ΑΒ, ΗΚ και ΒΓ συντρέχουν.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 2\cdot \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB} = \Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.
(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^2-1\right)^3}{\left(\alpha-1\right)^4}$ είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Μάθημα Θεωρίας Αριθμών
Ε.Μ.Ε

1. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n έτσι ώστε οι αριθμοί $n+3$ και n^2+3n+3 να είναι ταυτόχρονα τέλειοι κύβοι.

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n ο αριθμός
$$A = 5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$$
δεν είναι πρώτος.

3. Να αποδειχθεί ότι για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους a, b ο αριθμός
$$N = (36a+b)(36b+a)$$
δεν μπορεί να είναι δύναμη του 2.

4. Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση
$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

5. Ορίζουμε τους αριθμούς
$$T_n = 2^{2^n} + 1,$$
με $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι αν $m \neq n$ τότε οι αριθμοί T_m, T_n είναι σχετικά πρώτοι.

6. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι τέτοια, ώστε
$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

7. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη-μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοια, ώστε
$$(x^2+y)(x+y^2) = (x-y)^3.$$

8. Να προσδιορισθούν οι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους ο αριθμός
$$n^4 + 4^n$$
είναι πρώτος.

9. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι τέτοια, ώστε
$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

10. Αν οι θετικοί ακέραιοι x, y ικανοποιούν την σχέση
$$2x^2 + x = 3y^2 + y,$$
τότε να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί $x - y$ και $2x + 2y + 1$ είναι τέλεια τετράγωνα.

Σιλουανός Μπραζιτίκος

Λύσεις

1. Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο αριθμοί είναι τέλειοι κύβοι, τότε τέλειος κύβος είναι και το γινόμενό τους. Το γινόμενό τους ισούται με

$$K = (n+3)(n^2+3n+3) = n^3+6n^2+12n+9.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$(n+2)^3 < K < (n+3)^3,$$

για κάθε θετικό ακέραιο n. Έπεται ότι ο K δεν μπορεί να είναι τέλειος κύβος. □

2. Θέτουμε $5^{5^n} = x$. Τότε

$$A = x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι καθεμιά παρένθεση είναι μεγαλύτερη του 1 για $5^{5^n} = x$ επομένως ο A δεν είναι πρώτος. □

3. Έστω ότι

$$(36a+b)(36b+a) = 2^k, \tag{1}$$

για κάποιο ακέραιο $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε ότι $d = (a,b)$ και γράφουμε $a = dx$, $b = dy$, με $(x,y) = 1$ Τότε η (1) δίνει ότι

$$d^2(36x+y)(36y+x) = 2^k.$$

Έπεται ότι ο d είναι δύναμη του 2. Επομένως μένει να λύσουμε την εξίσωση

$$(36x+y)(36y+x) = 2^s, \tag{2}$$

για κάποιο $s \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι ο s δεν μπορεί να είναι μηδέν. Επιπλέον $(36x+y, 36y+x)|2^s$ άρα είναι κάποια δύναμη του δύο ή είναι ίσος με 1. Αν είναι κάποια δύναμη του 2, τότε $2|x$ και $2|y$, που είναι άτοπο. Επομένως ο $(36x+y, 36y+x) = 1$. Τότε η (2) συνεπάγεται ότι είτε ο $36x+y$ είτε ο $36y+x$ είναι ίσος με 1. Αυτό είναι άτοπο και το ζητούμενο έπεται. □

4. Αν $y < x$ τότε προφανώς δεν έχουμε λύσεις. Αν $y = x$, τότε έχουμε τα ζεύγη λύσεων $(x,y) = (1,1)$ και $(x,y) = (-1,-1)$.
Υποθέτουμε τώρα ότι $y > x$. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$p|x \Leftrightarrow p|y.$$

Έπεται ότι

$$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ και } y = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}.$$

Αντιχαθιστώντας στην εξίσωση και χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της παρογοντοποίησης στο $\mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha_i(x+y) = \beta_i(y-x),$$

για κάθε $i = 1, \dots, k$. Έπεται ότι $\alpha_i < \beta_i$ και επομένως $x|y$. Γράφουμε $y = sx$. Αντιχαθιστώντας στην αρχική εξίσωση παίρνουμε και ύστερα από τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$x^2 = s^{s-1}.$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι είτε $s = t^2$, είτε $s-1 = 2z$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε την οικογένεια λύσεων

$$(x,y) = \left(t^{t^2-1}, t^{t^2+1}\right), \ t \in \mathbb{N}^*.$$

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε την οικογένεια λύσεων

$$(x,y) = \left((2z+1)^z, (2z+1)^{z+1}\right), \ s \in \mathbb{N}.$$

□

5. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} T_n - 2 = 2^{2^n} - 1 &= \left(2^{2^{n-1}} - 1\right)\left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\ &= \left(2^{2^{n-2}} - 1\right)\left(2^{2^{n-2}} + 1\right)\left(2^{2^{n-1}} + 1\right) \\ &\dots \\ &= T_{n-1}T_{n-2}\dots T_1. \end{aligned}$$

Έπεται ότι αν κάποιος αριθμός d διαιρεί τον T_m και τον T_n τότε διαιρεί και το 2. Τότε πρέπει $d = 1$ γιατί οι T_n είναι περιττοί, που είναι και το ζητούμενο. □

6. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο, γράφουμε την εξίσωση στη μόρφη

$$\begin{aligned} &\left(x^3 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = y^4 \Rightarrow \\ &(2x^3+3)^2 - 4y^4 = 5 \Rightarrow \\ &(2x^3+3-2y^2)(2x^3+3+2y^2) = 5. \end{aligned}$$

Προκύπτουν έτσι τέσσερα συστήματα

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 1, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = -1, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = 5, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 - 2y^2 + 3 = -5, \\ 2x^3 + 2y^2 + 3 = -1. \end{cases}$$

Τελικά τα μοναδικά ζεύγη λύσεων είναι τα $(0,1), (0,-1)$. □

7. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0.$$

Η παραπάνω έχει ακέραιες λύσεις αν και μόνο αν η διακρίνουσά της είναι τέλειο τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή αν

$$\Delta = x(x+1)^2(x-8) = z^2,$$

για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο z. Έπεται ότι για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο w ισχύει

$$x(x-8) = w^2 \Rightarrow (x-4)^2 - w^2 = 16 \Rightarrow (x-w-4)(x+w-4) = 16.$$

Διακρίνοντας τις περιπτώσεις βρίσκουμε ότι τα ζεύγη λύσεων είναι

$$(x,y) \in \{(-1,-1),(8,-10),(9,-6),(9,-21)\}.$$

□

8. Αν $n=1$, τότε ο αριθμός είναι πρώτος. Αν n είναι άρτιος τότε ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 2 επομένως πρέπει $n=2k+1$. Τότε γράφουμε

$$\begin{aligned} n^4+4^n = n^4+4^{2k+1} &= n^4+4\cdot 2^{4k} \\ &= n^4+4m^4 \\ &= n^4+4m^4+(2mn)^2-(2mn)^2 \\ &= (n^2+2m^2-2mn)(n^2+2m^2+2mn), \end{aligned}$$

όπου $m=2^k$. Για $n>1$ εύκολα βλέπουμε ότι κάθε παρένθεση είναι μεγαλύτερη του 1, άρα ο αριθμός δεν είναι πρώτος. Συνεπώς μοναδική λύση είναι η $n=1$. □

9. Επειδή η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς x,y θέτουμε $x+y=s$ και $xy=p$. Τότε αυτή παίρνει τη μορφή

$$s^3-2sp=8s^2-8p+8.$$

Από την τελευταία έπεται ότι ο s είναι άρτιος και γράφουμε $s=2t$. Τότε παίρνουμε

$$2t^3-tp=8t^2-2p+2$$

και λύνονοντας ως προς p παίρνουμε

$$p=\frac{2t^3-8t^2-2}{t-2}=2t^2-4t-8-\frac{18}{t-2}.$$

Επομένως αφού p είναι ακέραιος, θα πρέπει $t-2|18$. Εξετάζοντας τις 12 περιπτώσεις που προκύπτουν, έχουμε τελικά ότι τα μόνα ζεύγη λύσεων είναι $(x,y)\in\{(8,2),(2,8)\}$. □

10. Γράφουμε τη δοθείσα στη μορφή

$$\begin{aligned} &2x^2-2y^2+x-y=y^2 \Rightarrow \\ (3) \qquad &(x-y)(2x+2y+1)=y^2. \end{aligned}$$

Θα βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των $x-y$ και $2x+2y+1$. Έστω ένας πρώτος p που είναι κοινός διαιρέτης των $x-y$ και $2x+2y+1$. Τότε η (3) δίνει ότι $p|y$. Οπότε $p|x$ αλλά τότε πρέπει $p|1$. Έπεται ότι δύο αυτοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους και έτσι πρέπει να είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα, που είναι και το ζητούμενο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι x,y που ικανοποιούν την (3). Για να δοθεί όμως απάντηση στο παραπάνω ερώτημα απαιτούνται εργαλεία ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρουσίασης. □