**5.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της $f$ και του άξονα $xx'$.

(α) $\dfrac{w^3-8}{w^2+4w-12}>0$ (1)

$w^2+4w-12\neq 0,\ w\neq -6$
$w\neq 2$

(1) $\Leftrightarrow (w^3-8)\cdot(w^2+4w-12)>0$

Βρίσκω τις ρίζες κάθε παράγοντα.

$w^3-8=0$ $\quad$ $w^2+4w-12=0$

$w^3=8$ $\quad$ $w=-6$ ή $w=2$

$w^3=2^3$

$w=2$ $\quad$ $w\in(-6,2)\cup(2,+\infty)$

| | $-\infty$ | | $-6$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w^3-8$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $w^2+4w-12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | $\times$ | $+$ | $\times$ | $+$ | |

(β) $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$ $\quad$ $\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}>0$ $\quad$ και $e^{2x}+4e^{x}-12\neq 0$

Θέτω $e^x=w$

$w^2+4w-12\neq 0$

$w\neq -6$ ή $w\neq 2$

$e^x\neq -6$ ή $e^x\neq 2$

ισχύει πάντα $\quad$ $x\neq \ln 2$

Θέτω $e^x=w$

$(w^3-8)(w^2+4w-12)>0$

$-6<w<2$ ή $w>2$

$-6<e^x<2$ ή $e^x>2$

$\ln e^x<\ln 2$ $\quad$ $x>\ln 2$

$x<\ln 2$

Άρα $x\neq \ln 2$

γ) Λύνω την εξίσωση

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\neq \ln 2$

$\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=0 \Leftrightarrow$

$\cancel{\ln}\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=\cancel{\ln}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=\dfrac{1}{1} \Leftrightarrow e^{3x}-8=e^{2x}+4e^{x}-12 \Leftrightarrow$

Θέτω: $e^x=a$

$\Leftrightarrow e^{3x}-e^{2x}-4e^{x}+4=0 \Leftrightarrow a^3-a^2-4a+4=0$

Ακ. ρίζες: $\pm 4, \pm 2, \pm 1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | $-4$ | $4$ | 1 |
| 1 | 1 | 0 | $-4$ | |
| 1 | 0 | $-4$ | 0 | |

$(a-1)(a^2-4)=0$

- $a=1$
- ή $a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 2$