

Η Θεωρία των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου



www.Askisopolis.gr

Σ. Μιχαήλογλου – Δ. Πατσιμάς – Ν. Τούντας

2024 – 2025

**ΣΤΕΛΙΟΣ ΜΙΧΑΗΛΟΓΛΟΥ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΤΣΙΜΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ**

**Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

www.Askisopolis.gr

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Πρόλογος

Το φυλλάδιο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Λυκείου, οι οποίοι θα εξεταστούν στα Μαθηματικά στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Σκοπό έχει να προετοιμάσει τους υποψηφίους για την θεωρία των που θα κληθούν να απαντήσουν στο Α θέμα των εξετάσεων. Περιλαμβάνει την θεωρία σε μορφή ερωτήσεων – απαντήσεων στις οποίες είναι σημειωμένες οι χρονιές που έχουν τεθεί στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Πρόκειται για 125 ερωτήσεις θεωρίας που καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης.

Ελπίζουμε το βιβλίο αυτό να φανεί χρήσιμο στους μαθητές στην προετοιμασία τους για τις εξετάσεις.

Οι συγγραφείς

Το εξώφυλλο είναι έργο του Wassily Kandinsky.

Περιεχόμενα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Κεφάλαιο 1ο.....	7 – 17
– Συναρτήσεις.....	7 – 10
– Όρια.....	11 – 14
– Συνέχεια.....	14 – 17
2. Κεφάλαιο 2ο.....	18 – 33
– Έννοια Παραγώγου.....	18 – 20
– Κανόνες Παραγωγισής.....	20 – 24
– Ρυθμός Μεταβολής.....	24 – 25
– Θεώρημα Rolle – Θ.Μ.Τ.	25 – 26
– Συνέπειες Θ.Μ.Τ. – Μονοτονία.....	26 – 27
– Τοπικά Ακρότατα – Θεώρημα Fermat.....	27 – 30
– Κυρτότητα.....	30 – 31
– Κανόνες De L’Hospital – Ασύμπτωτες.....	32 – 33
3. Κεφάλαιο 3ο.....	34 – 57
– Αρχική Συνάρτηση.....	34
– Ορισμένο Ολοκλήρωμα.....	34 – 36
– Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$	36 – 37
– Εμβαδόν Χωρίου.....	38 – 39

1ο Κεφάλαιο**ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ****Ορισμοί**

1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

2018, 2019

Απάντηση

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$x \rightarrow f(x)$$

2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση κατά την οποία $x \rightarrow y = f(x)$. Τι ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και τι εξαρτημένη;

Απάντηση

Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

3. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$.

Απάντηση

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

4. Έστω B μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο B ; Τι ονομάζεται σύνολο τιμών της f σε κάθε $x \in B$;

Απάντηση

Όταν θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B , θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή $f(B) = \{y / y = f(x), x \in B\}$.

5. Ποια στοιχεία αρκεί να δοθούν για να οριστεί μία συνάρτηση f ;

Απάντηση

Για να οριστεί μια συνάρτηση, f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία: το πεδίο ορισμού της και η τιμή της $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

6. Όταν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$, ποιο θα είναι το πεδίο ορισμού της;

Απάντηση

Όταν αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$, τότε θα θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$.

7. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

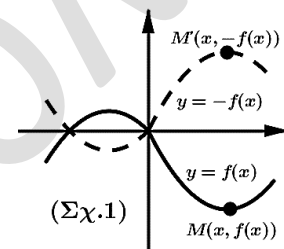
Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .

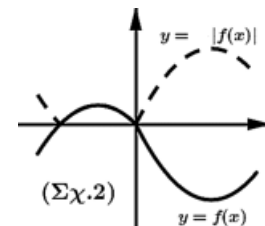
8. Πως προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $-f$, $|f|$ με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ.1)



Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ.2)



9. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

2007, 2012, 2016, 2021, 2023

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

10. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Αν Γ υποσύνολο των A και B , τότε πότε θα λέμε ότι οι f, g είναι ίσες στο Γ ;

Απάντηση

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .

11. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Πως ορίζονται οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$,

$$f \cdot g \text{ και } \frac{f}{g};$$

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο $f \cdot g$ και πηλίκο

$\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f - g)(x) = f(x) - g(x), (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και $f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

12. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ; Τι πρέπει να ισχύει για να ορίζεται η σύνθεση της f με την g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

13. Να αναφέρετε πότε μία συνάρτηση λέγεται:

- i) Γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.
- ii) Γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.
- iii) Γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

2024

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- i) γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- ii) γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$
- iii) γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .

14. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο;

2010, 2014

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

15. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

1987, 2005, 2015

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

16. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι μία συνάρτηση 1-1;

Απάντηση

Οι παρακάτω 4 προτάσεις αποτελούν τα κριτήρια για να είναι μία συνάρτηση 1-1:

- α) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.
- β) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f , η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- γ) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- δ) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση 1-1. **(ΠΡΟΣΟΧΗ! ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ, ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΔΕΝ ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟΝ ΑΝ)**

17. Πότε μία συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη; Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f .

2019

Απάντηση

Αν η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε έχει αντίστροφη.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g:f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1} .

Επομένως έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ οπότε $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in f(A)$.

Αποδείξεις

18. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Απάντηση

Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, δηλαδή την $y = x$, για αυτό το λόγο οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$.

ΟΡΙΑ

Ορισμοί

19. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Να αναφέρετε:

α) Την μορφή του συνόλου A ώστε να ορίζεται το όριο της f στο x_0 .

β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

α) Για να ορίζεται το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_0 , δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .

β) Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

20. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Να αναφέρετε:

α) Την μορφή του συνόλου A ώστε να ορίζεται το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

α) Για να ορίζεται το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_0 από μικρότερες τιμές, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) .

β) Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$.

21. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Να αναφέρετε:

α) Την μορφή του συνόλου A ώστε να ορίζεται το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

α) Για να ορίζεται το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_0 από μεγαλύτερες τιμές, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) .

β) Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.

22. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει κοντά στο x_0 μία ιδιότητα P ;

Απάντηση

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

- α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P .
- β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β) .
- γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0) .

23. Να διατυπώσετε τα δύο θεωρήματα που ισχύουν για το όριο και την διάταξη.**Απάντηση**

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

24. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.**2016, 2020, 2021****Απάντηση**

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

25. Να συγκρίνετε τις τιμές των $|\eta\mu x|$ και $|x|$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.**Απάντηση**

$|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

26. Να περιγράψετε την διαδικασία με την οποία υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$.**Απάντηση**

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

27. Να αναφέρετε τι εννοούμε όταν γράφουμε: α) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Απάντηση

α) Καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x ' x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0 , οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

β) Καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x ' x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0 , οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ ($M > 0$). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

28. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Να αναφέρετε:

α) Την μορφή του συνόλου A ώστε να ορίζεται το όριο της f στο $+\infty$.

β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Απάντηση

α) Για να ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, πρέπει η f να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

β) i) Καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

ii) Καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

iii) Καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

29. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Να αναφέρετε:

α) Την μορφή του συνόλου A ώστε να ορίζεται το όριο της f στο $-\infty$.

β) Τι εννοούμε όταν γράφουμε:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Απάντηση

α) Για να ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, πρέπει η f να ορίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $(-\infty, \alpha)$.

β) i) Καθώς το x ελαττώνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

ii) Καθώς το x ελαττώνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

iii) Καθώς το x ελαττώνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο, το $f(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $-\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

30. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Αποδείξεις

31. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, με $x_0 \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 =$$

$$\alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0)$$

32. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, με $Q(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Απάντηση

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμοί

33. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

1983, 1986, 2009, 2015

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

34. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν: **α)** Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή **β)** Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

35.Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;**Απάντηση**

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

36.Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α, β) ;**2004****Απάντηση**

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

37.Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$;**2008, 2004, 2012, 2017, 2021****Απάντηση**

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

38.Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f, g είναι συνεχείς στο x_0 ;**Απάντηση**

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$f + g$, $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$

39.Δώστε δύο συνθήκες για τις συναρτήσεις f, g ώστε η συνάρτηση $g \circ f$ να είναι συνεχής στο x_0 .**Απάντηση**

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

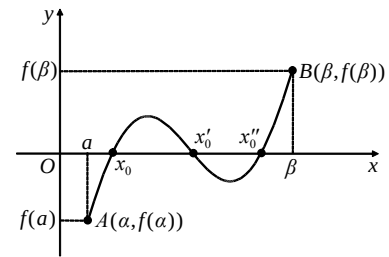
40.Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.**2014, 2020****Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

41.Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.**Απάντηση**

Γεωμετρική ερμηνεία

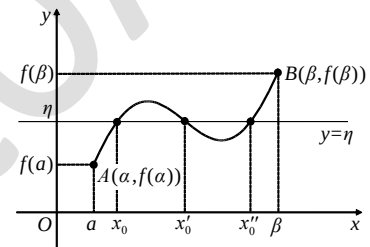
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x' η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**42. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.****Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

43. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.**Απάντηση****Γεωμετρική ερμηνεία**

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$ με $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.

**44. Τι είδους σύνολο είναι η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f .****Απάντηση**

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

45. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.**2024****Απάντηση**

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αποδείξεις**46. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:**

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$

υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

1995, 2005, 2015, 2020, 2024

Απάντηση

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. Ομοίως αν $f(\alpha) > f(\beta)$.

2ο Κεφάλαιο**ΕΝΝΟΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ****Ορισμοί**

47. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

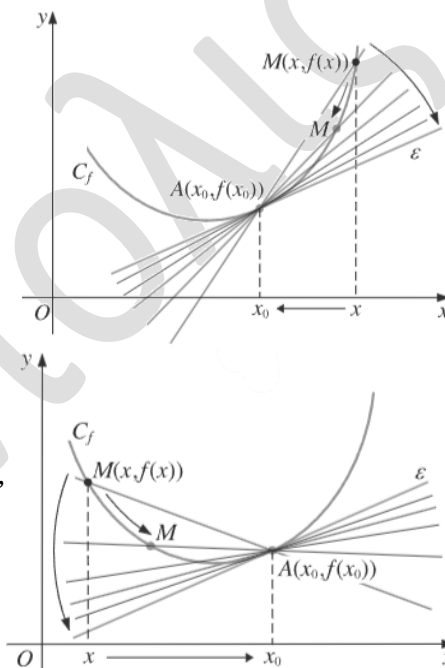
Απάντηση

Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M , παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε . Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$.

Η οριακή θέση της AM είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A .

Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η κλίση της εφαπτομένης θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



48. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

49. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

2004, 2009

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0

και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

50. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε:

α) Σε ποιον οφείλεται ο συμβολισμός $f'(x_0)$ για την παράγωγο της f στο x_0 ;

β) Να εξηγήσετε πως προκύπτει ότι $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Πως αλλιώς μπορεί να γραφεί το προηγούμενο όριο;

γ) Ποιον συμβολισμό δίνει ο Leibniz για την παράγωγο της f στο σημείο x_0 ;

Απάντηση

α) Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ για την παράγωγο της f στο σημείο x_0 οφείλεται στον Lagrange.

β) Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

γ) Ο Leibniz συμβολίζει την παράγωγο της f στο x_0 ως $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

51. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 ;

2000

Απάντηση

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

52. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ;

Απάντηση

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι

$v(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$.

53. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού κατά τη χρονική στιγμή t_0 ;

Απάντηση

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή $v(t_0) = s'(t_0)$.

Αποδείξεις

54. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

1999, 2000, 2003, 2007, 2013, 2018, 2022, 2023

Απάντηση

Για $x \neq x_0$ είναι $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Ορισμοί

55. Πότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της;

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή απλά παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

56. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

57. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

2010, 2013, 2020, 2023

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι

παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

58. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πως ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f ;

2020

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

59. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι n φορές παραγωγίσιμη με $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 3$. Πως ορίζεται η δεύτερη παράγωγος της f και πως η νιοστή;

Απάντηση

Η δεύτερη παράγωγος της f συμβολίζεται με f'' και είναι $f''(x) = [f'(x)]'$. Η νιοστή παράγωγος της f με $n \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(n)}$ και είναι: $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

60. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Απάντηση

Η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

61. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Απάντηση

Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

62. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Απάντηση

Η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

63. Να αναφέρετε δύο συνθήκες ώστε η συνάρτηση $f(g(x))$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Πως ορίζεται η παράγωγος της στο x_0 ;

Απάντηση

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

64. Να αναφέρετε δύο συνθήκες ώστε η συνάρτηση $f(g(x))$ να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ; Πως ορίζεται η παράγωγος της στο Δ ;

Απάντηση

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u)u'$.

65. Ποιος είναι ο κανόνας της αλυσίδας και πως προκύπτει;

Απάντηση

Ισχύει ότι $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u)u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.

Αποδείξεις

66. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$.

Απάντηση

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

67. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$.

2024

Απάντηση

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

68. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = vx^{v-1}$.

1998

Απάντηση

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} =$

$\frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1} \text{ δηλαδή}$$

$$(x^v)' = vx^{v-1}.$$

69. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2005, 2009

Απάντηση

Αν $x_0 \in (0, +\infty)$ τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

70. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Απάντηση

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ αφού $\sqrt{x} > 0$ για κάθε x κοντά στο μηδέν από μεγαλύτερες τιμές. Άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

71. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

1989, 2020, 2023

Απάντηση

Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0}$

$$\frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0). \text{ Δηλαδή}$$

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

72. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x) = -vx^{-v-1}.$$

Απάντηση

Για κάθε $x \neq 0$: $(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}.$

73. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\} \text{ με } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}_1 : (\varepsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

74. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Απάντηση

Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

75. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

Απάντηση

Αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$.

76. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

2008

Απάντηση

Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ορισμοί

77. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

78. Πως ορίζεται η επιτάχυνση ενός κινητού την χρονική στιγμή t_0 ;

Απάντηση

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$ όπου $s(t)$ η συνάρτηση θέσης του κινητού.

79. Από την παραγωγή x_0 μονάδων ενός προϊόντος, να αναφέρετε τι ονομάζεται:

α) Οριακό κόστος στο x_0 .

β) Οριακή είσπραξη στο x_0 .

γ) Οριακό κέρδος στο x_0 .

Απάντηση

α) Αν K είναι το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 .

β) Αν E είναι η είσπραξη από την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $E'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης E ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακή είσπραξη στο x_0 .

γ) Αν P είναι το κέρδος από την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $P'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κέρδους P ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κέρδος στο x_0 .

80. Από την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος να αναφέρετε πως ορίζεται το συνολικό κέρδος και πως το μέσο κόστος.

Απάντηση

Αν $K(x)$ είναι το συνολικό κόστος, $E(x)$ η συνολική είσπραξη και $P(x)$ κέρδος τότε ορίζουμε το κέρδος ως την διαφορά του κόστους $K(x)$ από την είσπραξη $E(x)$, δηλαδή $P(x) = E(x) - K(x)$. Το μέσο

κόστος ορίζεται ως $K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}$ όπου $K(x)$ το συνολικό κόστος.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE – ΘΜΤ

Ορισμοί

81. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

2012, 2020, 2021

Απάντηση

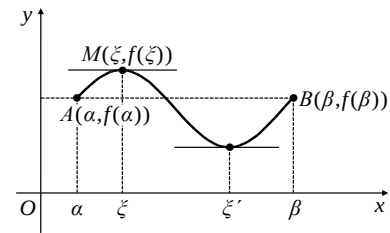
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) και $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

82. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

2007, 2020

Απάντηση

Γεωμετρικά, το θεώρημα Rolle σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



83. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

2013, 2016, 2019, 2022

Απάντηση

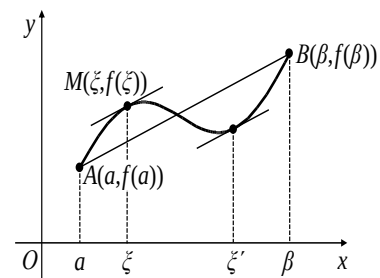
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

84. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

2003, 2008, 2016, 2019, 2022

Απάντηση

Γεωμετρικά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΜΤ – ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Αποδείξεις

85. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

1987, 1989, 1994, 1996, 2004, 2009, 2014, 2021

Απάντηση

Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό

σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$ και τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

86. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, δηλαδή $f(x) = g(x) + c$.

87. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

1996, 2006, 2012, 2017, 2019, 2021, 2023

2006

Απάντηση

Αρχικά και στις δύο περιπτώσεις εργαζόμαστε το ίδιο ακριβώς:

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

- Στην περίπτωση που $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ είναι $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, άρα έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Στην περίπτωση που $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ είναι $f'(\xi) < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, άρα έχουμε $f(x_2) - f(x_1) < 0$, οπότε $f(x_1) > f(x_2)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ .

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Ορισμοί

88. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

2012, 2020

Απάντηση

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

89. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

2015

Απάντηση

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .

90. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

2013, 2019, 2022

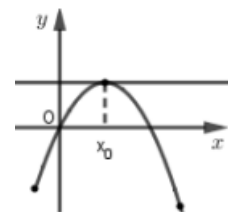
Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

91. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat.

Απάντηση

Γεωμετρικά το θεώρημα Fermat μας λέει ότι αν μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο αυτό είναι οριζόντια.



92. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f ;

Απάντηση

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

93. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f ;

2013

Απάντηση

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

Αποδείξεις

94. Να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

2004, 2011, 2016, 2017

Απάντηση

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (1).

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

95. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

1986, 2012, 2016, 2019, 2020

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Απάντηση

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1).

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1).

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό ελάχιστο αυτής.

96. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

2014, 2018

Απάντηση

Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$.

Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Ορισμοί

97. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

2006, 2024

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

98. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

2010, 2014

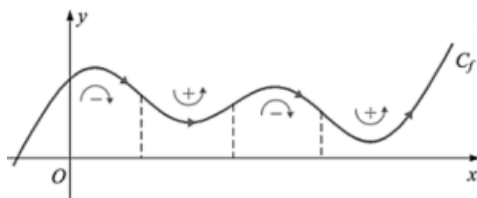
Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

99. Να δώσετε την έννοια της κυρτότητας εποπτικά.

Απάντηση

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά.



100. Να διατυπώσετε το θεώρημα που χρησιμοποιούμε για την εύρεση της κυρτότητας μίας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ .

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

101. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f ;

Απάντηση

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

102. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 .

Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

103. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής της f ;

Απάντηση

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι: **i)** τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και **ii)** τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

104. Να διατυπώσετε το θεώρημα που ισχύει για το σημείο καμπής μίας συνάρτησης f .

Απάντηση

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL – ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ**Ορισμοί**

105. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ;

2003, 2010, 2015, 2020, 2022

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

106. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

2007, 2016, 2023

Απάντηση

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

107. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

2005, 2011, 2022

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

108. Να διατυπώσετε το θεώρημα που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$ αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

109. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L'Hospital.

Απάντηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο),

τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμοί

110. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

2006, 2011, 2014, 2019

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Αποδείξεις

111. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

1998, 2001, 2003, 2010, 2015, 2022

Απάντηση

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμοί

112. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με $f(x) \geq 0$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Απάντηση

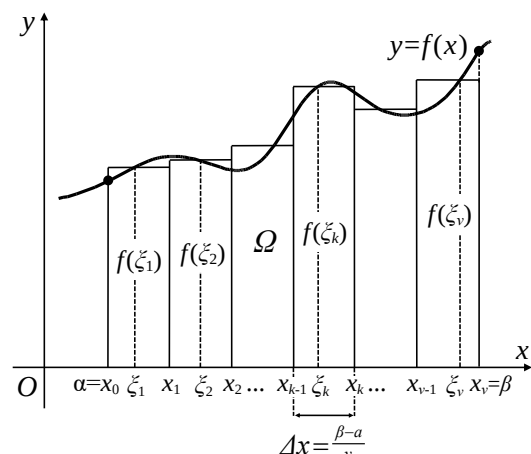
Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ισομήκη

υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, με τα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι:

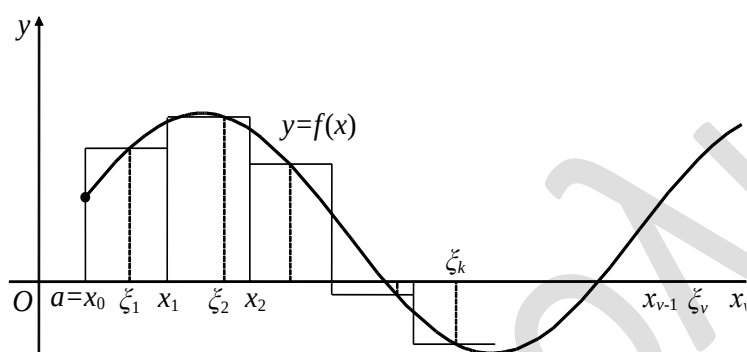


$$S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_v)]\Delta x$$

- Υπολογίζουμε το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$. Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

113. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$.

Απάντηση



Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{v}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x$.

Αποδεικνύεται ότι το όριο του αθροίσματος S_v , δηλαδή το $\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k .

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β και συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$. Δηλαδή $\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$.

Αποδείξεις

114. Να αποδείξετε, με χρήση του ορισμού του εμβαδού, ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{1}{3}$.

Χρησιμοποιείτε την ταυτότητα $1^2 + 2^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$ όπου v φυσικός αριθμός.

Απάντηση

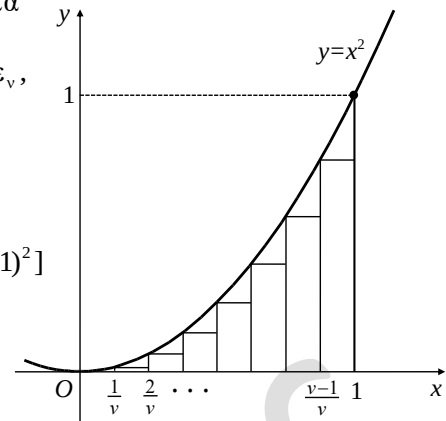
- Χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{1}{v}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{v}, \quad x_2 = \frac{2}{v}, \quad \dots, \quad x_{v-1} = \frac{v-1}{v}, \quad x_v = \frac{v}{v} = 1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά.

Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_v , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= f(0) \frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right) \frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left[0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] = \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] \\ &= \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}.\end{aligned}$$



Εδώ βάλαμε στην ταυτότητα $1^2 + 2^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$ όπου v το $v-1$ και προέκυψε:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2 = \frac{(v-1)v(2v-1)}{6}$$

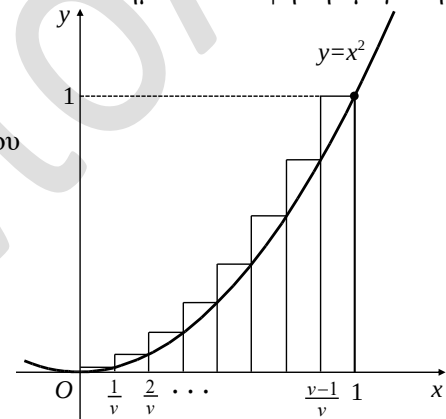
- Αν τώρα σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά, τότε το άθροισμα

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \frac{1}{v}$$

ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου

εμβαδού. Είναι όμως, $E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \frac{1}{v} =$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{v} \left[\left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right] = \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \\ &= \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}.\end{aligned}$$



Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_v και E_v . Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_v \leq E \leq E_v$,

οπότε $\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v \leq E \leq \lim_{v \rightarrow \infty} E_v$. Επειδή $\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = \frac{1}{3}$, έχουμε $E = \frac{1}{3}$.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Ορισμοί

115. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο του Δ . Τι γνωρίζετε για την συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; Δώστε μία εποπτική ερμηνεία για αυτό.

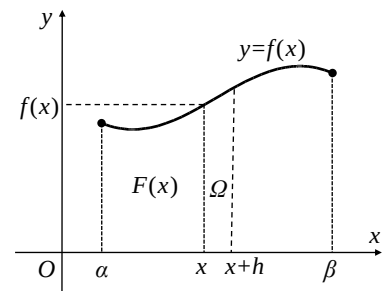
Απάντηση

Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως

$$\text{εξής: } F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt =$$



$$= \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt = \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0. \text{ Άρα, για μικρά } h > 0 \text{ είναι } \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x), \text{ οπότε } F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

116. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

2018, 2024

Απάντηση

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

117. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

Απάντηση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [\alpha, \beta].$$

118. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής.

Απάντηση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du, \text{ όπου } f, g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις, } u = g(x), du = g'(x)dx \text{ και } u_1 = g(\alpha), u_2 = g(\beta).$$

Αποδείξεις

119. Να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

2002, 2008, 2013, 2018

Απάντηση

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$

(1). Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$ οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$ οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha) \text{ και άρα προκύπτει } \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ

Ορισμοί

120. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε να αναφέρετε με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Απάντηση

Το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

121. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ τότε να αναφέρετε με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Απάντηση

Το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

122. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ τότε να αναφέρετε με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Απάντηση

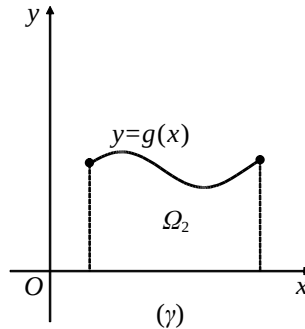
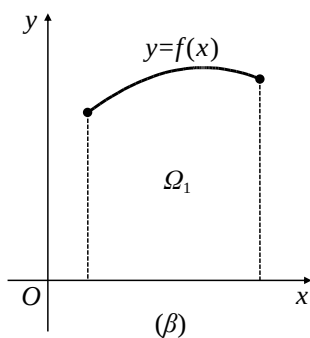
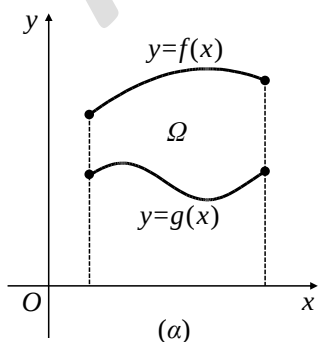
Το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται με $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$.

Αποδείξεις

123. Έστω δυο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx$.

Απάντηση

Παρατηρούμε ότι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$. Επομένως $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.

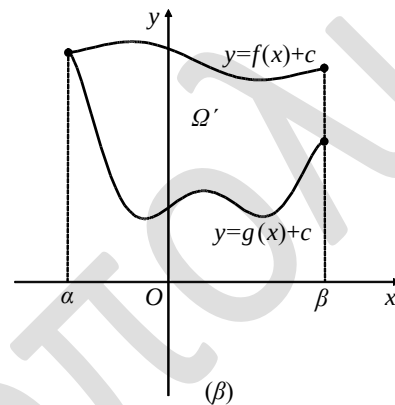
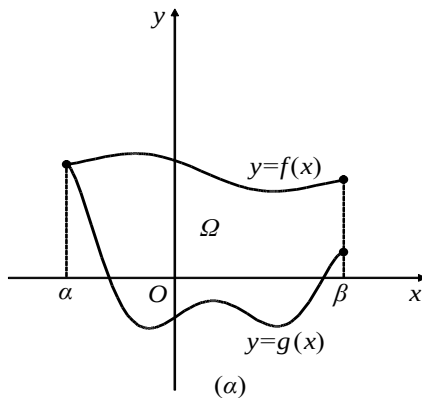


124. Έστω δυο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx$.

Απάντηση

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρξει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' . Επομένως έχουμε: $E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.

Άρα $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$.



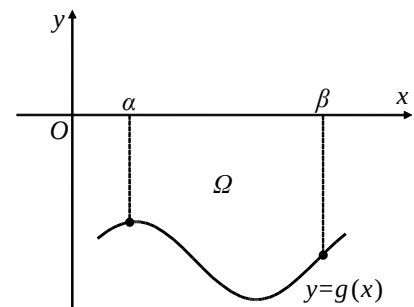
125. Έστω μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

Απάντηση

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx =$

$\int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$. Επομένως, αν για μια συνάρτηση g

ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$



Ασκησίοτητα



www.Askisopolis.gr