Δύσκολη Επαναληπτική μέχρι Αντίστροφη

Εκφώνηση Άσκησης

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x - \sqrt{ax}$ και $h: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = x + \sqrt{ax}$, με $a > 0$.

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $\varphi = g \cdot h$ έχει ελάχιστο το -1.

Α. Αποδείξτε ότι $a = 2$

Έστω ότι $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x^2) = \varphi(x)$, $x \geq 1$

Β.

Αποδείξτε ότι

i) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

ii) Η f είναι 1-1.

Γ. Προσδιορίστε την f^{-1} αν γνωρίζετε ότι

$$f([1, +\infty)) = [-1, +\infty)$$

Δ Λύστε την εξίσωση

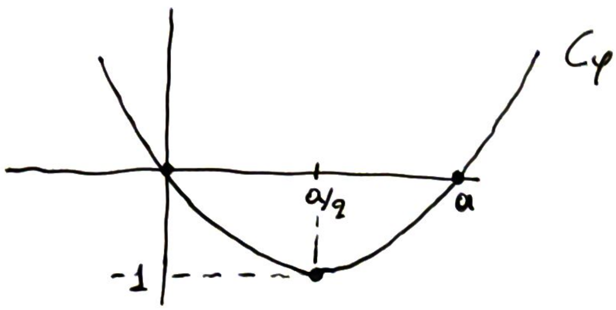
$$f(x) + 6 = 2\left(x - \sqrt{f(x) + 1}\right)$$

Λύση Άσκησης

Α. Θα βρούμε αρχικα την συνάρτηση φ.

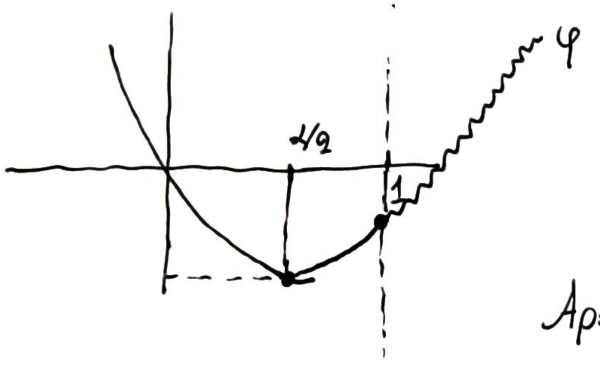
$$\varphi(x) = g(x)\cdot h(x) = x^2 - ax \quad \text{με} \quad D_\varphi = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$$

Η φ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{a}{2}$, οπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Αλλα δεν γνωρίζουμε αν το $\frac{a}{2}$ ειναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του 1.

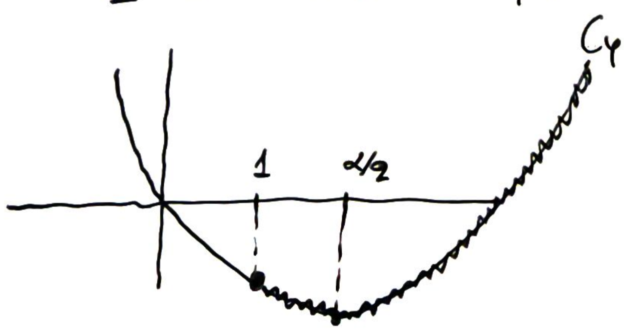
- Αν $\frac{a}{2} \leq 1$ τότε έχουμε:



Η φ ορίζεται μόνο για $x \geq 1$ αρα θα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $\varphi(1) = 1-a$

Αρα θα πρεπει $1-a = -1 \Rightarrow a = 2$

- Αν $\frac{a}{2} > 1$ τότε έχουμε·



Τοτε ελαχιστο το $\varphi(a/2)$

Αρα $\varphi\left(\frac{a}{2}\right) = -1 \iff$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -1 \overset{a>0}{\iff} a = 2 \ (\text{απορρ.})$$

Άρα τελικά $\alpha=2$

Β i) Για κάθε $x \geq 1$, έχουμε $\sqrt{x} \geq 1$

άρα $f(x^2)=\varphi(x) \underset{x \to \sqrt{x}}{\Rightarrow} f((\sqrt{x})^2)=\varphi(\sqrt{x})$ ⊛ Θέτουμε $x \to \sqrt{x}$ ⊛

Άρα $f(x)=\varphi(\sqrt{x})=x-2\sqrt{x}$

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$, έχουμε:

$f(x_1)+1=f(x_2)+1 \iff x_1-2\sqrt{x_1}+1=x_2-2\sqrt{x_2}+1$

$\iff (\sqrt{x_1}-1)^2=(\sqrt{x_2}-1)^2$

$\iff |\sqrt{x_1}-1|=|\sqrt{x_2}-1|$, $\sqrt{x_1} \geq 1$ και $\sqrt{x_2} \geq 1$

$\iff \sqrt{x_1}-1=\sqrt{x_2}-1 \iff \sqrt{x_1}=\sqrt{x_2} \iff x_1=x_2$

άρα f 1-1

Γ. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f,
άρα $D_{f^{-1}}=[-1,+\infty)$

Επίσης για κάθε $x \geq -1$ έχουμε $f^{-1}(x) \geq 1$.

$f(x)=y \iff x-2\sqrt{x}=y \iff x-2\sqrt{x}+1=y+1$

$\iff (\sqrt{x}-1)^2=y+1 \iff \sqrt{y+1}=\sqrt{x}-1$

$\iff \sqrt{x}=\sqrt{y+1}+1 \iff x=(\sqrt{y+1}+1)^2$

Άρα $f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}+1)^2$ ①

Δ. Εχουμε:

$$f(x)+6 = 2\left(x-\sqrt{f(x)+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = 2x-2\sqrt{f(x)+1}-6 \Leftrightarrow 1+f(x)+2\sqrt{f(x)+1}+1 = 2x-4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{f(x)+1}\right)^2 + 2\sqrt{f(x)+1}+1 = 2x-4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{f(x)+1}+1\right)^2 = 2x-4 \overset{1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(f(x)) = 2x-4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x-4 = x \Leftrightarrow x=4$$