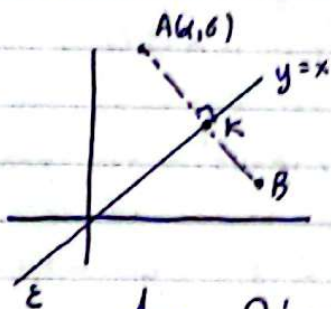


Ενότητα 1β: Κοινά Σημεία C_f και C_f^{-1}

1. Οι C_f και C_f^{-1} είναι συμμετρίες ως προς την ευθεία $y=x$

Απόδειξη

Το συμμετρικό του $A(\alpha, \beta)$ ως προς την $y=x$ είναι το $B(\beta, \alpha)$



Πράγματι έχουμε:

$$\lambda_{AB} = -1 \text{ αφού } AB \perp (\epsilon)$$

Αρα λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} y=x \\ y-\beta = -x+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ x-\beta = -x+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ x = \frac{\alpha+\beta}{2} = y \end{cases}$$

Βρίσκουμε το σημείο $K(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2})$ και επειδή K μέσο του AB , έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_A + x_B}{2} = x_K &\Rightarrow x_B = 2x_K - x_A = \alpha + \beta - \alpha = \beta \\ \frac{y_A + y_B}{2} = y_K &\Rightarrow y_B = 2y_K - y_A = \alpha + \beta - \beta = \alpha \end{aligned} \right\} B(\beta, \alpha)$$

Τώρα εστω $A \in C_f$ άρα $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$
Άρα το $B(\beta, \alpha) \in C_f^{-1}$ άρα C_f και C_f^{-1} είναι συμμετρίες ως προς την $y=x$

Ερώτηση 18 : Κοινά σημεία C_f και $C_{f^{-1}}$

2 Η $y=x$ δεν είναι η μοναδική ευθεία ως προς την οποία οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές

1^ο Παράδειγμα

$$f(x) = -x^3 \quad \text{τότε} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ ο.π.θ.ε. και ως προς την $y=-x$.
Πράγματι εστω $A(a, f(a)) \in C_f$ με $a > 0$
και $f(a) = -a^3$ άρα $A(a, -a^3) \in C_f$. Ομοίως
 $f^{-1}(-(-a^3)) = f^{-1}(a^3) = -\sqrt[3]{a^3} = -a$ άρα $B(a^3, -a) \in C_{f^{-1}}$ άρα
Αν $A(a, -a^3) \in C_f$ τότε $B(a^3, -a) \in C_{f^{-1}}$

2^ο Παράδειγμα

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ με $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ άρα $C_f, C_{f^{-1}}$ συμμετρικές ως προς $y=x$ και $y=-x$

3^ο Παράδειγμα

$f(x) = a - x$ με $f^{-1}(x) = a - x$. Τότε οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχει άπειρους άξονες συμμετρίας

Ενότητα 18: Κοινά σημεία f και f^{-1}

3. Η $f(x) = x$ είναι η μοναδική γνησίως

αύγουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ που ταυτίζεται (ισούται) με την αντιστροφή της

Απόδειξη

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύγουσα με $f(x) = f^{-1}(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) > x_0$

Τότε έχουμε f αντιστρέφεται με f^{-1} γνησίως αύγουσα.

$$\text{Άρα } f(x) > x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 > f^{-1}(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow x_0 > f(x_0) \text{ άτοπο}$$

Ομοίως αν $f(x_0) < x_0$

Άρα για το οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_0) = x_0$
Άρα $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ενότητα 16: Κοινό σημείο C_f και $C_{f^{-1}}$

4. Αν η $f: A \rightarrow B$ αντιστρέφεται και οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, τότε αυτό βρίσκεται πάνω στην $y=x$

απόδειξη

Εστω $A(\alpha, \beta)$ το μοναδικό κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$.

$$\text{Τότε } \begin{cases} f(\alpha) = \beta \\ f^{-1}(\beta) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = f^{-1}(\beta) \\ \alpha = f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\beta, \alpha) \in C_{f^{-1}} \\ \text{και} \\ (\beta, \alpha) \in C_f \end{cases}$$

Αρα $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ αφού έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Επομένως $\alpha = \beta$

Αρα $A(\alpha, \alpha)$ επομένως $A \in y=x$

Ενότητα 18: Κοινά σημεία f και f^{-1}

5. Αν ένα σημείο ανήκει στην f και

στην $y=x$ τότε ισοδυναμεί ανήκει στην f^{-1}
και αντίστροφα.

Άρα ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x$$

απόδειξη

Αν $A \in f$ και $A(x, \alpha)$ και ^{ισωδύνη} ανήκει και στην $y=x$.

Τότε επειδή f, f^{-1} συμμετρικά ως προς την $y=x$

παρατηρούμε ότι $(\beta, \alpha) \in f^{-1}$ άρα $f^{-1}(\beta) = \alpha$ ①

Όμως $A \in y=x$ άρα $\alpha = \beta$.

Από την ① έχουμε $f^{-1}(\alpha) = \alpha = \beta$ άρα το

$A(x, \beta) = A(x, \alpha)$ ανήκει στην f^{-1}

Ενότητα 18: Κοινά σημεία f και f^{-1}

6. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα τότε
οι f και f^{-1} τέμνονται πάνω στην $y=x$

Αρα αν f γνησίως αύξουσα ισχύει η
τρικιά ισοδυναμία

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

Απόδειξη

Θέτουμε $K(x) = x + f(x)$ και έστω $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με
 $x_1 < x_2$. Τότε $f(x_1) < f(x_2)$ και $x_1 < x_2$ άρα
 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$

$$\Rightarrow K(x_1) < K(x_2) \text{ άρα } K \text{ } \uparrow \text{ και } 1-1$$

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = f(x) \\ x \in A \cap f(A) \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(f^{-1}(x)) = f(f(x)) \\ x \in A \cap f(A), f(x) \in A \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = f(f(x)) \\ x, f(x) \in A \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + f(x) = f(f(x)) + f(x) \\ x, f(x) \in A \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} K(x) = K(f(x)) \\ x, f(x) \in A \end{array} \right\} \stackrel{K \uparrow}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \\ x \in A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = x \\ x \in f(A) \end{array} \right.$$

Αρα αποδεικνύεται η "τρικιά" ισοδυναμία !!!

Ενότητα 10: Κοινά σημεία f και f^{-1}

7. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα και
περιττή στο A , τότε οι f και f^{-1} τέμνονται
μόνο στην $y = -x$

Απόδειξη

Θέτουμε $K(x) = f(x) - x$ και έστω $x_1, x_2 \in A \cap f(A)$ με $x_1 < x_2$.
Τότε $f(x_1) > f(x_2)$ ① αφού f γν. φθίνουσα.
Επίσης έχουμε $-x_1 > -x_2$ άρα $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$
άρα η K είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Τώρα για κάθε $x \in A \cap f(A)$ έχουμε

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(f(x))$$
$$\Leftrightarrow x = f(f(x))$$

$$\Leftrightarrow x - f(x) = f(f(x)) - f(x)$$

$$\stackrel{f(-x) = -f(x)}{\Leftrightarrow} -(-x) + f(-x) = f(f(x)) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(-x) - (-x) = K(f(x))$$

$$\Leftrightarrow K(-x) = K(f(x))$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -x$$