

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$

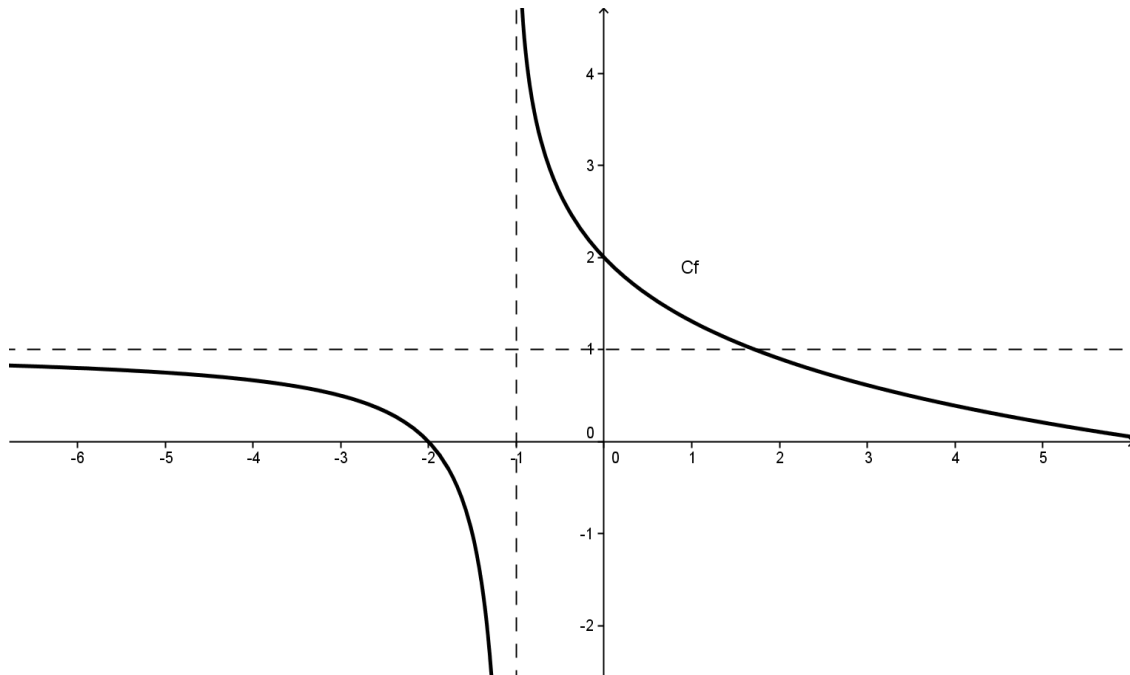
(Μονάδες 4)

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x' σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα y' σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$

(Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$$

(Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$$

(Μονάδες 13)