

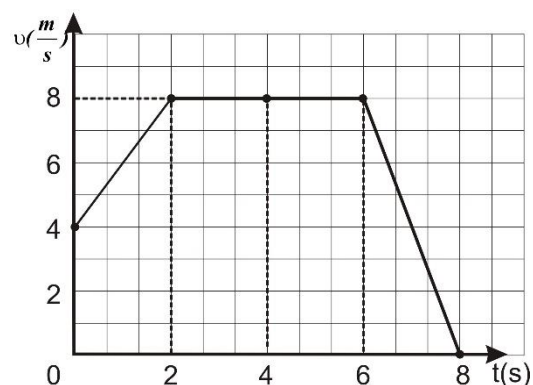
ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας 10 kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα Ox και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Θεωρείστε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε το είδος της κίνησης του σώματος στα χρονικά διαστήματα $0 \rightarrow 2$ s, $2 \rightarrow 6$ s και $6 \rightarrow 8$ s

Μονάδες 6



Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5$ s.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 6,5$ s.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα από $0 \rightarrow 8$ s.

Μονάδες 6

Δ1) Είδος κίνησης

(Σχόλιο: οι υπολογισμοί δεν είναι υποχρεωτικοί στο Δ1, αλλά χρειάζονται στα επόμενα ερωτήματα)

- **0 έως 2s: Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση**

διότι η ταχύτητα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό που ισούται με την κλίση της ευθείας σε αυτό το χρονικό διάστημα:

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{(8 - 4)m/s}{(2 - 0)s} = 2 m/s^2$$

- **2s έως 6s: Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση**

διότι η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με 8m/s σε αυτό το χρονικό διάστημα.

- **6s έως 8s: Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση**

διότι η ταχύτητα μειώνεται με σταθερό ρυθμό που ισούται με την κλίση της ευθείας σε αυτό το χρονικό διάστημα:

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = \frac{(0 - 8)m/s}{(8 - 6)s} = -4 m/s^2$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της επιτάχυνσης είναι αντίθετη της φοράς της κίνησης (= φορά της ταχύτητας), που κατά σύμβαση θεωρούμε ως θετική, και άρα ότι το σώμα επιβραδύνεται, το οποίο συμφωνεί και με το ότι το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται με το χρόνο.

Δ2) Στο χρονικό διάστημα 0 έως 2s το σώμα κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα. Επομένως, το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_1 = 2 m/s^2$ (βλ. Δ1) σε κάθε χρονική στιγμή αυτού του διαστήματος, επομένως και την χρονική στιγμή $t_1 = 1,5s$. Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα υπολογίζεται με τη βοήθεια του 2^{ου} Νόμου του Newton και ισούται με:

$$\Sigma F_1 = ma_1 = 10kg \cdot 2 \frac{m}{s^2} = +20N$$

Η τιμή αυτή είναι σταθερή σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα (0 έως 2s). Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει τη φορά της κίνησης, γι' αυτό και άλλωστε προκαλεί την αύξηση της ταχύτητας. Το θέμα ζητούσε μόνο το μέτρο της δύναμης την χρονική στιγμή $t_1 = 1,5s$ που φυσικά ισούται με 20N, όπως βρήκαμε παραπάνω.

Συγγραφή λύσης: Γεώργιος Κεφαλιακός (1^ο ΓΕΛ Χαλανδρίου)

Δ3) Προκειμένου να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του σώματος την χρονική στιγμή $t_3 = 6,5s$, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος σε αυτή την χρονική στιγμή. Δυστυχώς, η κλίμακα του δοθέντος σχήματος δεν βοηθάει να βρούμε την τιμή της ταχύτητας από το διάγραμμα κι έτσι πρέπει να κάνουμε υπολογισμό μέσω τύπων. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο τρίτο χρονικό διάστημα (6s έως 8s) στο οποίο το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $a_3 = -4 \text{ m/s}^2$ (βλ. Δ1). Σύμφωνα με την εξίσωση της ταχύτητας (που προκύπτει από τον ορισμό της επιτάχυνσης στην Ε.Ο.Μ.Κ.):

$$v = v_{\alpha\rho\chi} + a_3\Delta t \Rightarrow v = v_{\alpha\rho\chi} - |a_3|\Delta t$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $v_{\alpha\rho\chi} = 8\text{m/s}$ είναι η αρχική ταχύτητα του 3^{ου} σταδίου της κίνησης, δηλαδή η ταχύτητα την χρονική στιγμή 6s κατά την οποία αρχίζει να επιβραδύνεται το σώμα.

Την χρονική στιγμή $t_3 = 6,5s$ έχει περάσει χρονικό διάστημα $\Delta t = (6,5 - 6)s = 0,5s$ από την στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται το σώμα οπότε η ταχύτητά του μειώνεται από 8m/s στην τιμή:

$$v_3 = v_{\alpha\rho\chi} - |a_3|\Delta t = 8\frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5\text{s} = 6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Την χρονική στιγμή $t_3 = 6,5s$ η κινητική ενέργεια του σώματος ισούται με:

$$K_3 = \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\text{kg} \cdot \left(6\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 180\text{J}$$

Δ4) Για να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα $\Delta t_{ολ} = (8 - 0)s$ πρέπει να βρούμε πρώτα το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα. Αυτό ισούται με τη μετατόπιση του σώματος στο συγκεκριμένο θέμα Δ, διότι η ταχύτητα του σώματος έχει σταθερό πρόσημο και άρα το σώμα κινείται συνεχώς προς την ίδια κατεύθυνση, π.χ. προς τα δεξιά, ωστόσο δεν ισχύει γενικά... (π.χ. όταν το σώμα αλλάζει κατεύθυνση κίνησης). Το συνολικό διάστημα μπορεί να βρεθεί με χρήση τύπων ή μέσω του εμβαδού στο διάγραμμα της ταχύτητας με τον χρόνο:

$$s_{ολ} = s_1 + s_2 + s_3 = E_{\tau\rho\alpha\pi\epsilon\zeta\iota\omicron\nu} + E_{\omicron\rho\rho\theta\omicron\gamma.\pi\alpha\rho/\mu\omicron\nu} + E_{\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\omicron\nu}$$
$$s = \left[\frac{(8 + 4) \cdot 2}{2} + 8 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \right] \text{m} = (12 + 32 + 8)\text{m} = 52\text{m}$$

Η μέση ταχύτητα ισούται με:

$$v_{\mu} = \frac{s_{ολ}}{\Delta t_{ολ}} = \frac{52\text{m}}{8\text{s}} = 6,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Συγγραφή λύσης: Γεώργιος Κεφαλιακός (1^ο ΓΕΛ Χαλανδρίου)

2^{ος} τρόπος υπολογισμού διαστήματος με τύπους

- **0 έως 2s: Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση**

$$s_1 = \Delta x_1 = v_0 \Delta t_1 + \frac{1}{2} a_1 \Delta t_1^2 = 4 \frac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 = 12m$$

- **2s έως 6s: Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση**

$$s_2 = \Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 = 8 \frac{m}{s} \cdot (6 - 2)s = 8 \frac{m}{s} \cdot 4s = 32m$$

- **6s έως 8s: Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση**

$$\begin{aligned} s_3 &= \Delta x_3 = v_{\alpha\rho\chi,3} \Delta t_3 + \frac{1}{2} a_3 \Delta t_3^2 = v_{\alpha\rho\chi,3} \Delta t_3 - \frac{1}{2} |a_3| \Delta t_3^2 = \\ &= 8 \frac{m}{s} \cdot (8 - 6)s - \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{m}{s^2} \cdot [(8 - 6)s]^2 = 8 \frac{m}{s} \cdot 2s - \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 = 8m \end{aligned}$$

Σε συμφωνία με τον προηγούμενο υπολογισμό:

$$s_{ολ} = s_1 + s_2 + s_3 = 12m + 32m + 8m = 52m$$

Σχόλιο

Κάποιος μαθητής προσπάθησε να βρει τη μέση ταχύτητα με μέσο όρο, αλλά απέτυχε... Ο σωστός τρόπος είναι ο εξής:

Θα πρέπει να χωρίσουμε το συνολικό χρονικό διάστημα σε ίσα επιμέρους χρονικά διαστήματα (εδώ βολεύει σε διαστήματα των 2s). Αν βρούμε τη μέση ταχύτητα στο κάθε επιμέρους διάστημα τότε μπορούμε να κάνουμε μέσο όρο και στα 4 διαστήματα... Το καλό με την Ε.Ο.Μ.Κ. είναι ότι η μέση ταχύτητα είναι ίση επίσης με το μέσο όρο της αρχικής και τελικής ταχύτητας (αυτό συμβαίνει πάντα όταν το διάγραμμα αντιστοιχεί σε συνάρτηση ευθείας γραμμής!) και μπορείτε να το δείξετε στην Ε.Ο.Μ.Κ. (άσκηση για το καλοκαίρι!)

- **0 έως 2s: Ευθύγρ. Ομαλά Επιταχυνόμενη Κίνηση:**

$$v_{\mu 1} = \left(\frac{4 + 8}{2}\right) \frac{m}{s} = 6 \frac{m}{s}$$

ή με τον γνωστό τρόπο:

$$v_{\mu 1} = \frac{s_1}{\Delta t_1} = \frac{12m}{2s} = 6 \frac{m}{s}$$

- **2s έως 4s: Ε.Ο.Κ.: $v_{\mu 2} = 8 \frac{m}{s}$** (αφού η ταχύτητα είναι σταθερή...)

- **4s έως 6s: Ε.Ο.Κ.: $v_{\mu 2} = 8 \frac{m}{s}$** (ομοίως...)

- **6s έως 8s: Ευθύγρ. Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση:**

$$v_{\mu 3} = \left(\frac{8 + 0}{2}\right) \frac{m}{s} = 4 \frac{m}{s}$$

ή με τον γνωστό τρόπο:

$$v_{\mu 3} = \frac{s_3}{\Delta t_3} = \frac{8m}{(8 - 6)s} = 4 \frac{m}{s}$$

Ας κάνουμε τον μέσο όρο των 4 επιμέρους μέσων ταχυτήτων:

$$v_{\mu} = \frac{v_{\mu 1} + v_{\mu 2} + v_{\mu 2} + v_{\mu 3}}{4} = \frac{(6 + 8 + 8 + 4)m/s}{4} = 6,5 \frac{m}{s}$$

ίδιο αποτέλεσμα!!!

ΑΣΚΗΣΗ για το καλοκαίρι: Σώμα εκτελεί Ε.Ο.Μ.Κ. ($\alpha = \text{σταθ.}$). Αν την χρονική στιγμή t_1 έχει ταχύτητα v_1 και την χρονική στιγμή t_2 έχει ταχύτητα v_2 , να δείξετε ότι η μέση ταχύτητά του στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ είναι ο μέσος όρος των v_1 και v_2 .

(Η αναλυτική λύση δεν ξεπερνάει τις 2-3 γραμμές... περιμένω μήνυμα στο e-class...)