

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μάθημα 1ο

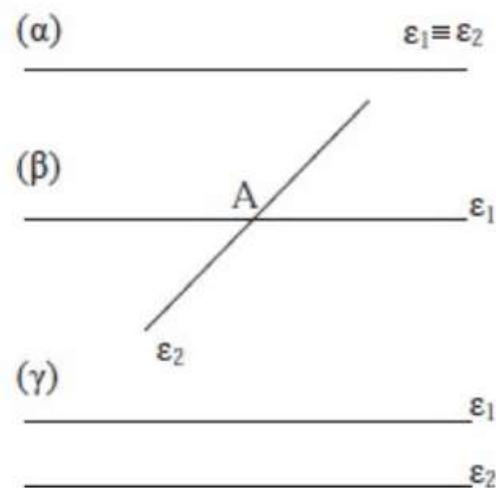
Όπως είδαμε στην §2.3, δύο **διαφορετικές** ευθείες μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Επομένως, οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2 , οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

- i) ταυτίζονται (σχ.1α),
- ii) τέμνονται (σχ. 1 β),
- iii) δεν τέμνονται (σχ.1γ).

Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται **παράλληλες**, ώστε:

Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Σχήμα 1

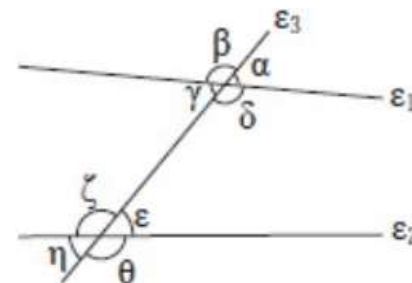


4.2 Τέμνουσα δυο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 . Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.

Οι γωνίες γ , δ , ε , ζ που βρίσκονται μεταξύ των ε_1 , ε_2 λέγονται "**εντός**", ενώ οι γωνίες α , β , η , θ λέγονται "**εκτός**". Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται "**επί τα αυτά μέρη**", ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται "**εναλλάξ**".

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται **εντός εναλλάξ**, οι γωνίες ε και α λέγονται **εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη**, ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται **εντός και επί τα αυτά μέρη**.



Σχήμα 2



ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

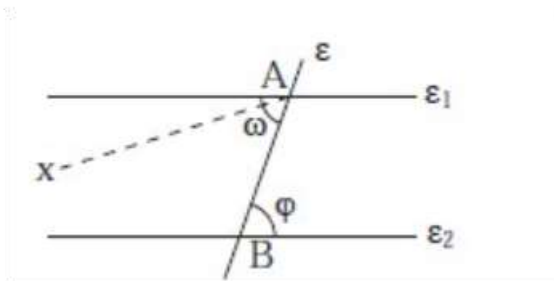


Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

Πρόταση Ι

Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

- i) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
- ii) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.



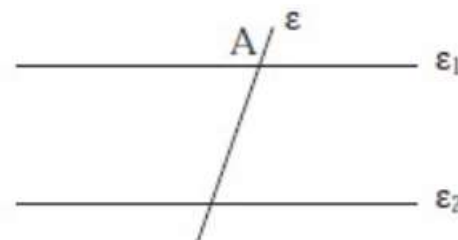
Πρόταση II

Αν δυο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



Πρόταση III

Αν δυο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση IV

Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑ



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
2. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}y$ και σημείο A της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το A προς την Ox τέμνει την Oy στο B , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.
3. Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}y$ και η διχοτόμος της OD . Από σημείο A της Oy φέρουμε παράλληλη προς την OD που τέμνει την προέκταση της Ox στο B . Να αποδείξετε ότι $OA = OB$.
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο Δ της πλευράς AB . Αν ο κύκλος $(\Delta, \Delta B)$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$.

Μικροπείραμα



5. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA , ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta\epsilon \parallel B\Gamma$.
6. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και M το μέσο χορδής του AB . Φέρουμε $Ox \perp OM$. Να αποδείξετε ότι $Ox \parallel AB$.

