

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ****Κεφάλαιο 9ο : Μετρικές Σχέσεις****1. ΘΕΜΑ 2_14549**

Τα μήκη των πλευρών α , β , γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $\alpha = 7$, $\beta = 3$ και $\gamma = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

2. ΘΕΜΑ 2_16080

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$, $B\Gamma = \sqrt{41}$ και $A\Gamma = 8$.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή AD , της AB στην $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

β) Αν $AD = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους BD .

(Μονάδες 12)

3. ΘΕΜΑ 2_16101

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

4. ΘΕΜΑ 2_16757

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 6$ και $A\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά AB , τέτοιο ώστε $A\Delta = 4$. Φέρουμε την απόσταση BE της κορυφής B από την $\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma\Delta$.

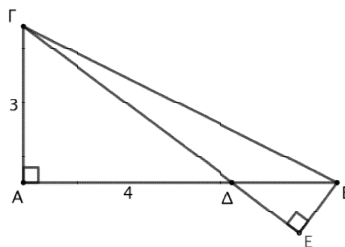
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .

(Μονάδες 8)

**5. ΘΕΜΑ 2_16804**

Στο παρακάτω τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη του AH και $B\Theta$.

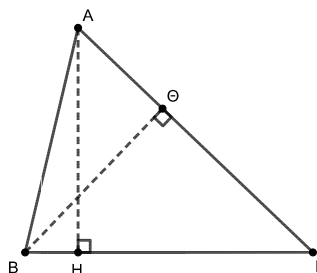
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- i. Η προβολή της πλευράς $B\Gamma$ στην πλευρά $A\Gamma$ είναι το τμήμα
- ii. Η προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $B\Gamma$ είναι το τμήμα
- iii. Το τμήμα $H\Gamma$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- iv. Το τμήμα $A\Theta$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- v. $A\Gamma^2 = AB^2 + \dots - 2 \cdot B\Gamma \cdot \dots$
- vi. $B\Gamma^2 = \dots + A\Gamma^2 - 2 \cdot \dots \cdot A\Theta$

(Μονάδες 15)

β) Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 5$ και $A\Gamma = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Theta$.

(Μονάδες 10)



6. ΘΕΜΑ 2_16805

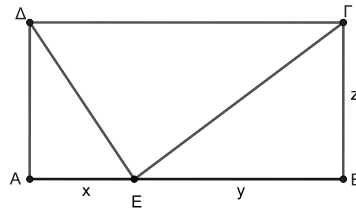
Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 4, 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

(Μονάδες 12)



7. ΘΕΜΑ 2_17342

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 7$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και ύψος $ΑΔ = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΔ = 4$.

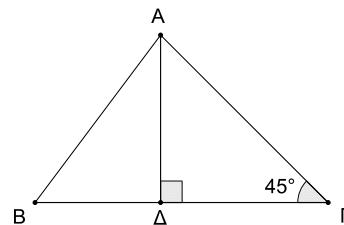
(Μονάδες 5)

ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 12)



8. ΘΕΜΑ 2_17343

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

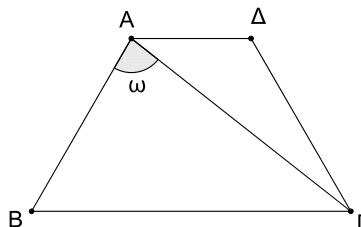
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\sin \omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $\widehat{BAG}$.

(Μονάδες 15)

Δίνεται ότι $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.



9. ΘΕΜΑ 2_17354

Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά

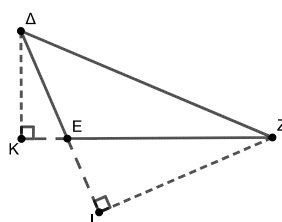
v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2 \cdot \Delta E \cdot \dots$

vi. $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \cdot \dots \cdot \Delta I$

(Μονάδες 15)

β) Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)



10. ΘΕΜΑ 2_21067

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 12$ και $AB = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 13$.

(Μονάδες 08)

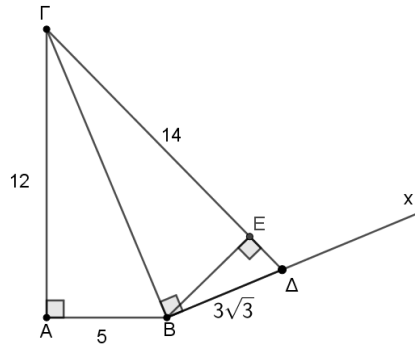
β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $BD = 3\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της BD στην $\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 09)



11. ΘΕΜΑ 2_21302

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A . Αν $B\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 8$ να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = 4$.

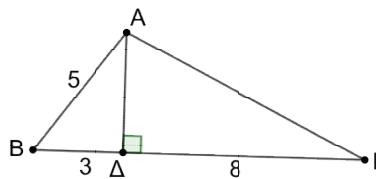
(Μονάδες 07)

β) $A\Gamma = \sqrt{80}$.

(Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)



12. ΘΕΜΑ 2_22130

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2R$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.

(Μονάδες 13)

13. ΘΕΜΑ 2_22248

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 9$, $\Gamma A = 12$ και $\Gamma B = 15$ και ευθείες ϵ , δ παράλληλες στην AB , όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.

(Μονάδες 8)

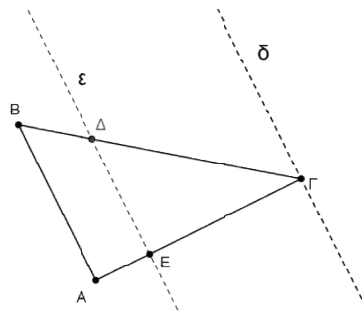
β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις πλευρές ΓA , ΓB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ , τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔB ,

(Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(Μονάδες 9)



14. ΘΕΜΑ 2_22512

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $B\Gamma = 4$, $A\Gamma = 2$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά AB.

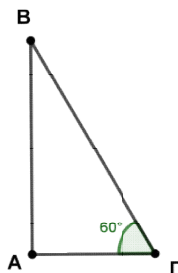
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)



15. ΘΕΜΑ 2_22514

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 5$ και $AB = 4$. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά AΓ.

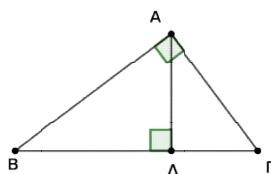
(Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς AB πάνω στη BΓ.

(Μονάδες 8)

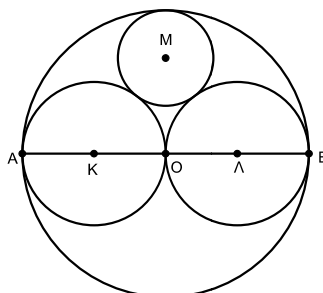
γ) το ύψος AΔ.

(Μονάδες 8)



16. ΘΕΜΑ 4_14500

Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O. Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ. Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι KM, ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K, Λ, M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

(Μονάδες 06)

Στήλη A	Στήλη B
Διάκεντρος	Μήκος
1. KΛ	i. R
2. ΛM	ii. 2R
3. OM	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

β)

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MKΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του.

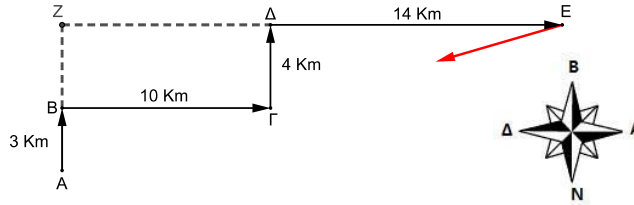
(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ.

(Μονάδες 13)

17. ΘΕΜΑ 4_14533

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

- Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)
- Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

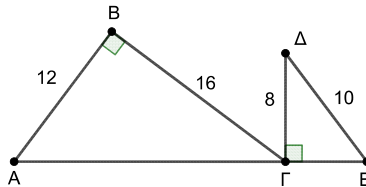
β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

18. ΘΕΜΑ 4_16133

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα AB , $BΓ$, $ΓΔ$ και $ΔΕ$ έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες $\widehat{ABΓ}$ και $\widehat{ΔΓΕ}$ είναι ορθές και τα σημεία A , $Γ$ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

- Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΑΕ$. (Μονάδες 7)
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)
- Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $ΕΔ$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου $ΖΑΕ$ από την κορυφή του Z . Να αποδείξετε ότι:

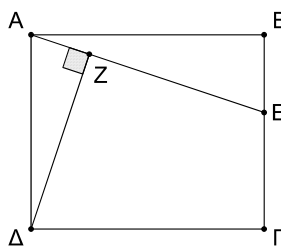
- $EH = 13$, (Μονάδες 6)
- $ZH = \frac{52}{3}$. (Μονάδες 5)



19. ΘΕΜΑ 4_17348

Στο παρακάτω σχήμα το $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το E σημείο της πλευράς $BΓ$, ώστε $BE = 2$. Έστω $ΔΖ$ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $Δ$ προς την $ΑΕ$.

- Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $ΔΖΑ$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)
- Αν $ΔΖ = ΖΕ$, να υπολογίσετε το μήκος του $ΑΔ$. (Μονάδες 8)



20. ΘΕΜΑ 4_21149

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R .

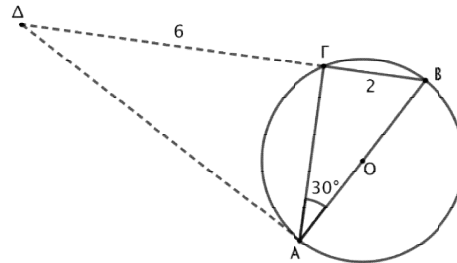
ii. Το μήκος της πλευράς AG .

(Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA

εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



21. ΘΕΜΑ 4_21185

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το

φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ .

(Μονάδες 7)

22. ΘΕΜΑ 4_22400

Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται ότι $AB = 9$, $AG = 12$, $AD = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

iii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

iv. $\Delta E = 5$.

(Μονάδες 6)

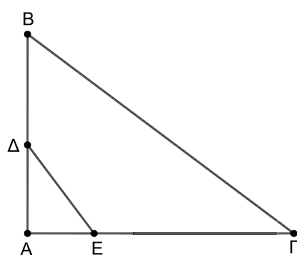
β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο.

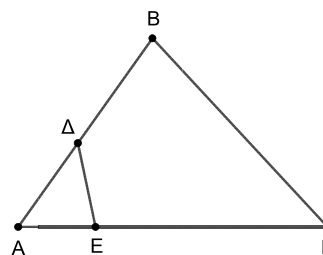
(Μονάδες 6)

ii. $\Delta E = \frac{10}{3}$.

(Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Σχήμα 2