

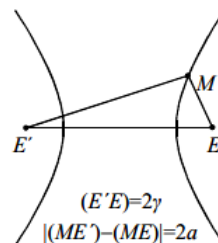
ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ορισμός: Υπερβολή με εστίες E' και E λέγεται ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $E'E$.

Τη **σταθερή** αυτή διαφορά τη συμβολίζουμε $2a$ και την **εστιακή απόσταση** $E'E$ με 2γ .

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό ένα σημείο M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν $|(ME') - (ME)| = 2a$.

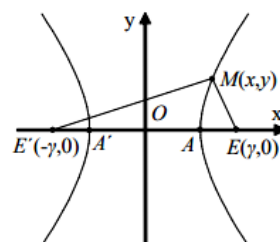
Ισχύει $|(ME') - (ME)| < (E'E)$ δηλαδή $2a < 2\gamma$, οπότε $a < \gamma$.



Εξίσωση Υπερβολής

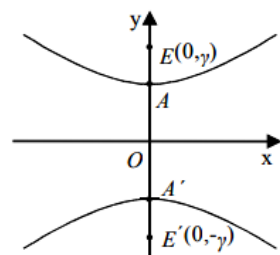
Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και διαφορά $2a$ είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}.$$



Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$, και διαφορά $2a$ είναι:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}.$$



Αν $a = \beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται: $x^2 - y^2 = a^2$ ή $y^2 - x^2 = a^2$ αντίστοιχα.

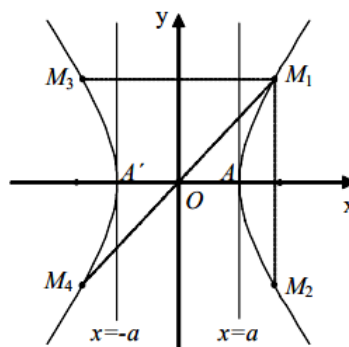
Ιδιότητες Υπερβολής

Έστω μια υπερβολή C , η οποία ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy έχει εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- Η υπερβολή έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων O κέντρο συμμετρίας. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

- η υπερβολή **τέμνει τον άξονα $x'x$** στα σημεία $A'(-a, 0)$, και $A(a, 0)$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Η υπερβολή C **δεν τέμνει τον άξονα $y'y$** .

- τα σημεία της υπερβολής C βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x = -a$ και $x = a$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.



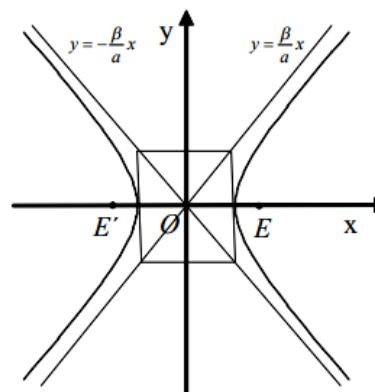
Ασύμπτωτες Υπερβολής

Η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

Η υπερβολή $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y = \pm \frac{a}{b}x.$$

Εκκεντρότητα Υπερβολής

Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, και τη συμβολίζουμε με ϵ , το λόγο

$$\epsilon = \frac{c}{a} > 1. \text{ Ισχύει ότι: } \frac{b}{a} = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$$

Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Στην περίπτωση της **ισοσκελούς υπερβολής** είναι $a = b$, οπότε $\epsilon = \sqrt{2}$.

Εφαπτομένη Υπερβολής

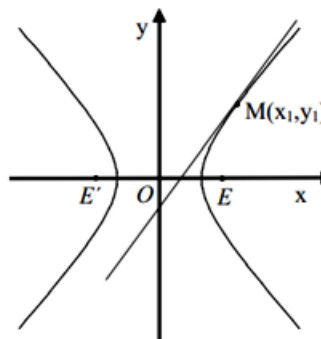
- Έστω μια υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ αυτής.

Η **εφαπτομένη** της υπερβολής στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

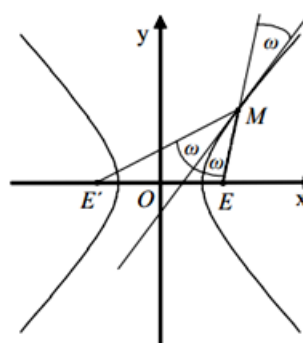
- Αν μια υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, τότε η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ θα έχει εξίσωση:

$$\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$$



- Ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής.**

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'ME}$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής.



ΘΕΜΑ 2 21651

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο

$A(4,0)$. α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

ΘΕΜΑ 2 21218

Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1, (C_2): y^2 - x^2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0), E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.

β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 2 20721

Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C . β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της C .

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΘΕΜΑ 2 21649

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να

βρείτε: α) την εξίσωση της C . β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

ΘΕΜΑ 2 22566

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και

$A'(-1,0)$ β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y =$

$-2x$. γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι

παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.