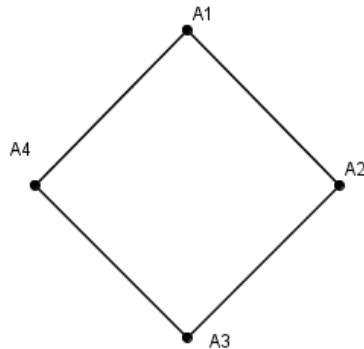


ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ 2.1 ΕΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ**ΘΕΜΑ 2 22049**

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.

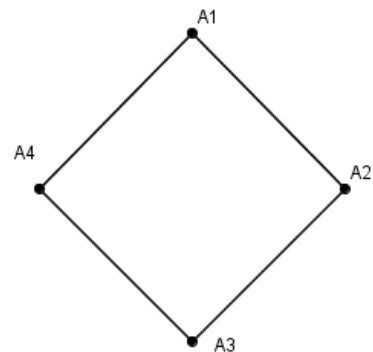


α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

ΘΕΜΑ 2 22047

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.

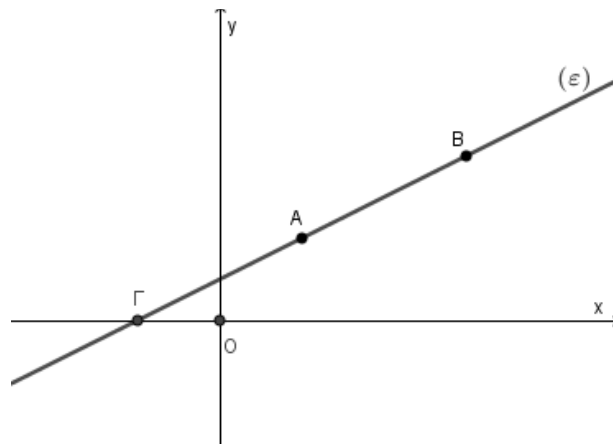


α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.

ΘΕΜΑ 2 20868

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε) .



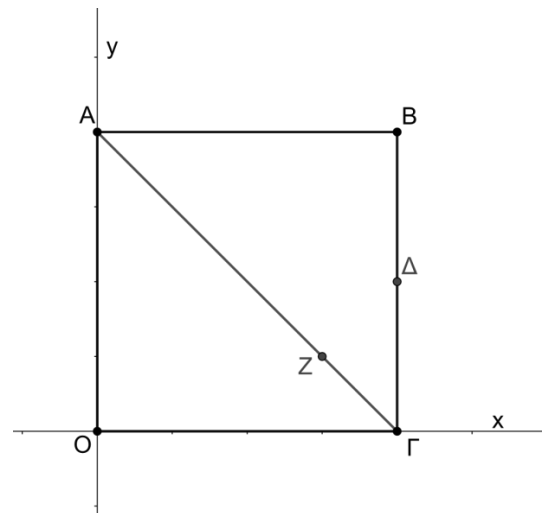
α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε) .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα x' .

ΘΕΜΑ 2 22173

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma O$ με κορυφές τα σημεία $A(0,4)$, $B(4,4)$, $\Gamma(4,0)$, $O(0,0)$. Στην διαγώνιο $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της $B\Gamma$.



α) Να βρείτε:

- i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ .
- ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Z .

β) Αν το σημείο Δ είναι το $(4,2)$ και το σημείο Z το $(3,1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2 22071

Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$.
- ii. Η κορυφή $Γ$ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $Γ(5, 3)$.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του $BΓ$ και $ΓΔ$.

ΘΕΜΑ 2 21965

Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$

α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB . β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου $(ζ)$ του ευθύγραμμου τμήματος AB .

γ) Αν $(ζ): y = x - 4$ και $(ε): y = 2 \cdot x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $(ζ)$ και $(ε)$

ΘΕΜΑ 2 21964

Δίνονται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία $(ε_1)$ με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία $(ε_2)$ που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία $(ε_1)$.

β) το σημείο τομής B , των ευθειών $(ε_1)$ και $(ε_2): y = -x + 2$. (Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό $Γ$ του σημείου A , ως προς την ευθεία $(ε_1)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 15044

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6, -1)$.

α)

- i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3,2)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας $(ε)$ του ευθύγραμμου τμήματος AB .

ΘΕΜΑ 4 18568

Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία DE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2 18351

Δίνονται τα σημεία $A(-1,5)$, $B(3,3)$. Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

ΘΕΜΑ 2 18236

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις

ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$

ii. την εξίσωση του ύψους BD .

ΘΕΜΑ 2 16002

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$.

ΘΕΜΑ 2 15271

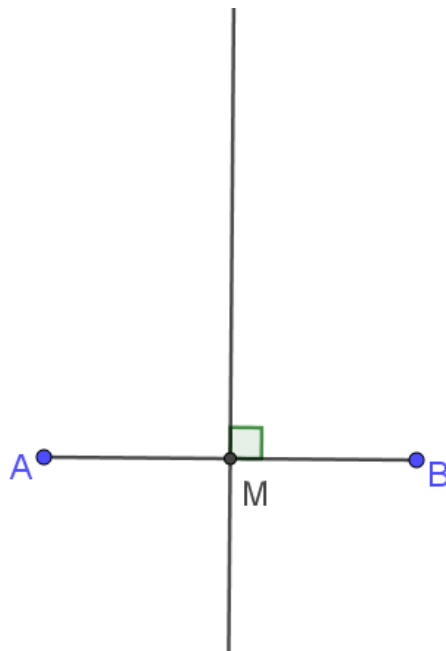
Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

ΘΕΜΑ 2 15027

Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου του τμήματος AB .



ΘΕΜΑ 2 16766

Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι κάθετες.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.
- γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 2 15657

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΘΕΜΑ 4 15275

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M . Να βρείτε:

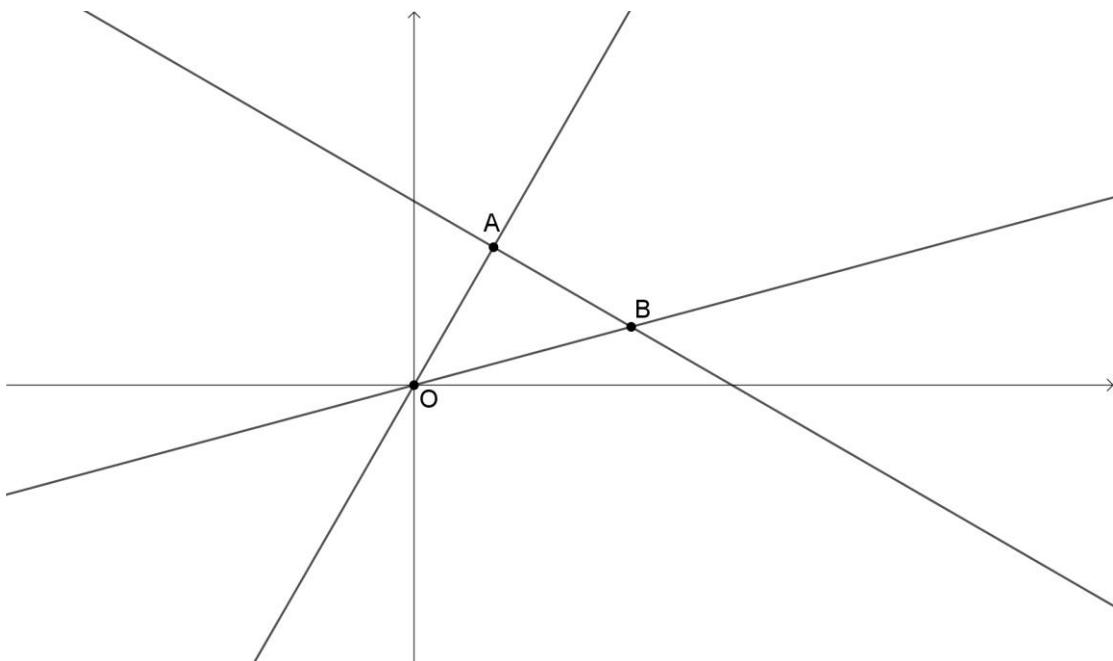
- i. Την εξίσωση της.
- ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

- i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB .
- ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
- iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

ΘΕΜΑ 4 15029

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

ΘΕΜΑ 4 17078

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in P$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 4 14970

Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο M των δυο ευθειών.

Έστω $M(1, -2)$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το M .

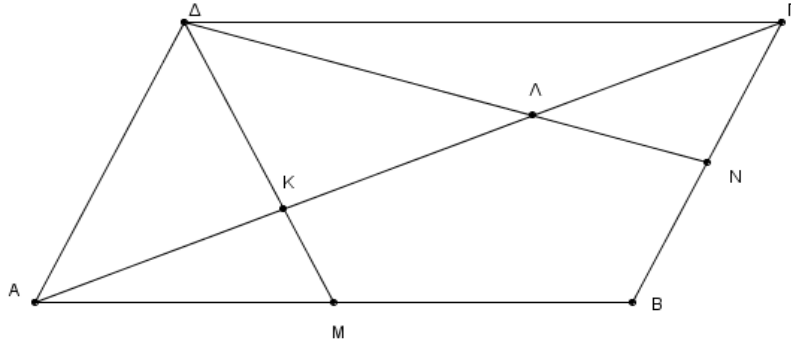
γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής A, B της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 4 22065

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N .
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM , ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ .
- δ) Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.