1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Ο μαθητής πρέπει:

- να έχει κατανοήσει τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα και να είναι ικανός να σχεδιάζει το γινόμενο τους
- να γνωρίζει τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα
- να έχει κατανοήσει την έννοια του γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσοτέρων διανυσμάτων και να τον αναπαριστά
- να γνωρίζει την συνθήκη παραλληλίας και την απόδειξη της
- να γνωρίζει πώς να εκφράζει τη διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος ως συνάρτηση των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του

• Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Α. Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Έστω ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ και ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Ορίζουμε σαν γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

1. Έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$, δηλαδή ισχύει ότι $|\lambda \cdot \vec{\alpha}| = |\lambda||\vec{\alpha}|$.

2. **α.** Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$,

β. Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$,

γ. Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$.

Επίσης ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda > 0$.

🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda < 0$.

🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε ή $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

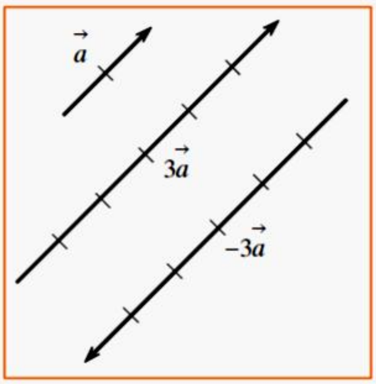
🕮 **Πρόσεξε** ότι το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha}$ με $\lambda \neq 0$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Παράδειγμα

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει μέτρο 2, τότε:

- Το διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $|3\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.

- Το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο ίσο $|-3\vec{\alpha}| = |-3|\,|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.



Β. Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες (χωρίς απόδειξη):

1. $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$

2. $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$

3. $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

4. $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$

5. $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$

6. $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

7. $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

8. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

9. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$.

Γ. Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$.
Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, όπου $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=-2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Δ. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Θέμα 5$^{\text{ο}}$
Αποδείξτε ότι αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τότε
$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}, \lambda\in R$

Απόδειξη

⇨ (Αντίστροφο) Αν ισχύει η σχέση $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, τότε όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

⇨ (Ευθύ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.

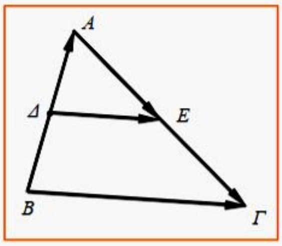
Θέτουμε $\kappa=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, όπου $\kappa\geq 0$, τότε $|\vec{\alpha}|=\kappa|\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = \kappa > 0$, έχουμε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = -\kappa < 0$, έχουμε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = \kappa = 0$, έχουμε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει μοναδικός $\lambda \in \mathbf{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. ■

Παράδειγμα

Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$.



Είναι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta A} + 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{\Delta E}$.

Αφού λοιπόν $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta E}$, συμπεραίνουμε ότι $\Delta E // B\Gamma$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2|\overrightarrow{\Delta E}|$, που σημαίνει ότι $\Delta E = \frac{1}{2}B\Gamma$, δηλαδή αποδείξαμε διανυσματικά τη γνωστή μας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία σχέση $\Delta E = // \frac{B\Gamma}{2}$.

Δ. Διανυσματική Ακτίνα του Μέσου Τμήματος

Θέμα 6ο

Αποδείξτε ότι για την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου Μ ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Απόδειξη

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, άρα $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$. ■