

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + (k + 2)x - 3, k \in \mathbb{R}$ το οποίο διαιρούμενο με το $x + 1$ δίνει υπόλοιπο 1.
 - a. Να αποδείξετε ότι $k = -10$.
 - b. Για την τιμή του k του (α) ερωτήματος.
 - i. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $x + 1$.
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.
 - iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < x + 2$.
2. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^4 + ax^3 - (6 - a)x^2 + \beta x + 2\beta - 3\alpha + 1$ το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 - 1$.
 - a. Να βρείτε τις τιμές των α και β .
 - b. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 - c. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.
3. Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
 - a. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - b. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f , να μην είναι πάνω από τον άξονα $\chi\chi$.
 - c. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $f(-x): (x^2 + 1)$.
4. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x): (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$.
5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$.
 - a. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$, να αποδείξετε ότι $k = -6$ και $\lambda = -5$.
 - b. Να γίνει διαίρεση του $P(x)$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$, με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
 - c. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$.

6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 11x - 2a$ διέρχεται από το $M(-1,6)$.

- Να βρείτε την τιμή του $a \in R$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^3 + ax^2 + (2a + 3)x - 3 = 0, a \in Z$.

- Να βρείτε για ποια τιμή του $a \in Z$ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραια ρίζα.
- Για την μικρότερη τιμή του a που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

8. Να εξετάσετε με σχήμα Horner αν τα πολυώνυμα $x + 1, x - 3$ είναι παράγοντες του

$$f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9.$$

9. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

10. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β .

11. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x + 3)$.

12. Να βρεθεί το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in R$.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x - 6$, $a, \beta \in R$.
- Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$.
 - Αν το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi(x) = x^2 - 3x + 4$ να βρείτε τους a και β καθώς και το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης.
 - Για τις τιμές των a και β που βρήκατε, να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$.
15. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = 4x^3 - 2x^4 - x + 4$ με το $x - 2$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
16. Για ποιες τιμές των κ, λ το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \kappa x^3 - \lambda x^2 - x + \kappa + 1$ έχει παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.
17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 11x + 7$. Ναδειχθεί ότι το $(x - 1)^2$ διαιρεί το πολυώνυμο και να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης.
18. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $3x^2 - x - 4$ είναι $2x + 5$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
19. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x = 0$ και $2(2x - 1)^{1998} + (4x - 1)^{1997} = 4x + 1$.
20. Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(3x - 2)P(x) = 6x^3 - 7x^2 - x + 2$ και να λυθεί η εξίσωση $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$.
21. Να βρεθεί το πρόσημο των γινομένων:
- $P(x) = (x - x^2)(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 4)$
 - $Q(x) = (x + 2)(3 - 2x - x^2)(x^2 - 5x + 8)$

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- a. $(5x - 10)(x + 3)(x^2 + 9x + 20) < 0$
- b. $(10 - x^2 - 3x)(x^2 - 2x + 1) > 0$
- c. $(1 - x)^2(x^2 - 8x + 18) \leq 0$
- d. $4(1 - x^2)(x^2 + x)(x^2 + 2x - 3) \geq 0$
- e. $(3x^2 - 2x + 1)(-x^2 + 6x - 9) \geq 0$

23. Δίνεται το $P(x) = x^4 + ax^3 + \beta x^2 - 18x + \beta - 1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + 2x + 1$.

- a. Να βρεθούν οι τιμές των α και β .
- b. Να βρεθούν όλες οι ρίζες του $P(x)$.
- c. Να γίνει γινόμενο το $P(x)$.
- d. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η $P(x)$ έχει τη γραφική της παράσταση κάτω από τον $\chi\chi$.

24. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- a. $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \leq 0$
- b. $x^3 + 2x^2 + 6x + 27 \leq 0$
- c. $x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x \geq 0$
- d. $x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$
- e. $x^3 + 3x^2 - 4x - 6 > 0$

25. Δίνονται το $P(x) = ax^4 - x^3 + \beta x + \gamma$.

- a. Αν ο σταθερός όρος του είναι -4 .
- b. Το άθροισμα των συντελεστών του είναι -6 .
- c. Το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - 44$ έχει παράγοντα το $x - 3$.

Να βρείτε:

- d. Τα α, β, γ
 Αν $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -4$
 - i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x^2-7x+12} \leq 0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x^2-7x+12} \geq x^2 - x - 2$

26. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax + \beta$ διαιρούμενο με $x^2 - 5x + 6$ δίνει υπόλοιπο $20x - 32$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, $f(x) = P(2\sin x)$ και $g(x) = \sqrt{P(x)}$:

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$

ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = x - 1$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $g(x) > x - 1$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

27. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$

28. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{1}{x} + \frac{5}{4-x} < 1$

29. Δίνεται το $P(x) = (x-2)(x^6+1)$.

a. Ποιος είναι ο βαθμός του $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

b. Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$;

30. Το $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+3)$.

31. Να προσδιορίσετε τους κ, λ ώστε το $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

32. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$

b. $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

c. $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

33. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- a. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
- b. $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^5 + 8 = 0$
- c. $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

34. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 9 \text{ και } g(x) = 5x^2 - 3x$$

35. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 \text{ βρίσκεται πάνω από την ευθεία } \varepsilon: y = 3x + 9.$$

36. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- a. $\sqrt{3x-7} < \sqrt{x+3}$
- b. $x-1 \geq \sqrt{x+5}$
- c. $\sqrt{x^2+x+3} \geq x + \frac{1}{2}$

37. Δίνεται η $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$. Να βρείτε :

- a. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
- b. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.

38. Δίνεται το $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

- a. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολώνυμο $2x - 1$. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$;
- b. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- c. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.
- d. Να βρείτε το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
- e. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3\nu\nu^2 x - 3\eta\mu x + 4 = 0$.

39. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a. $\frac{2x^2}{x+1} + \frac{5}{3-x} = -\frac{x^2+11}{x^2-2x-3}$

b. $\sqrt{2-x} = 2$

c. $\sqrt{3x} - \sqrt{x+1} = 1$

d. $2\sqrt{x+5} = x+2$

40. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - x^3 + ax^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2,0)$, τότε :

a. Να αποδείξετε ότι $a = -14$

b. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$. Να βρείτε:

a. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

b. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.