

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 5.1 και 5.2)

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x) = P(x) + Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $v(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

- iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{kx}$, $k \geq 0$.

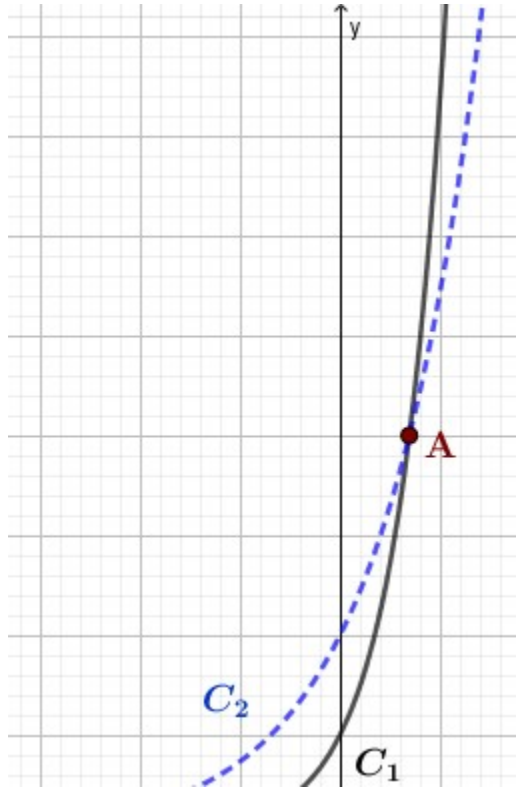
α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

δ) Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $k(x) = e^{2x}$.

ε) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A;



8.

α) Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$

β) Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

δ) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ε) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

στ) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

9. Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x.$$