

Διάταξη πραγματικών αριθμών – Ασκήσεις

1. Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$3(\alpha - 3) > \alpha - 5$$

2. Αν $\alpha < -3$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) 2[5(\alpha - 3) - 2(\alpha - 9)] < -3(1 - \alpha)$$

$$\beta) \alpha(\alpha + 1)^2 < -2$$

3. α) Αν ισχύει ότι $\alpha < 3 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$$

β) Αν ισχύει $\alpha < -2 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 - 2\beta > \alpha(\beta - 2)$$

4. α) Αν $\alpha \geq \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \beta^3 \geq 0$$

β) Αν $x \leq -2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^3}{2} - x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

5. Αν ισχύει $\alpha + \beta = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha\beta \leq 4$$

$$\beta) \alpha^2 + \beta^2 \geq 8$$

6. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$,

β) να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \quad \alpha^3, \quad 1, \quad \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}$$

Τράπεζα θεμάτων

7. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad L = 2\alpha\beta, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathcal{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $K \geq L$ για κάθε τιμή των α, β .

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Τράπεζα θεμάτων

8. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3 - \beta), \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathcal{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Να αποδείξετε ότι $K \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των α, β .

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Τράπεζα θεμάτων

9. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν:

$$3 \leq x \leq 5 \quad \text{και} \quad -2 \leq y \leq -1$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$

β) $x^2 + y^2$

Τράπεζα θεμάτων

10. Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα, όπως στην πρώτη γραμμή.

Διάστημα	Ανίσωση	Συμβολισμός
	$-2 < x \leq 3$	$x \in (-2, 3]$
	$-1 \leq x < 5$	
		
		$x \in (-3, 1)$

11. Αν $A = [-3, 4)$ και $B = (-1, 6]$, να βρείτε τα σύνολα:

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A - B \quad \text{και} \quad B - A$$

κάνοντας το αντίστοιχο σχήμα (με διαστήματα).

12. Αν $x \in [-3, 2]$ και $y \in [-4, 1]$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που θα πάρει η παράσταση:

$$A = 3x - 2y + 2$$

και σε ποιο διάστημα ανήκει το A .

13. Με βασικό σύνολο το $\mathcal{R}$ θεωρούμε τα σύνολα $A = [2, +\infty)$ και $B = (-\infty, 6)$. Να βρείτε τα σύνολα:

$$A \cup B, A \cap B, A', B', A' \cap B', A \cup B', A - B, B - A$$

14. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \qquad \beta) \left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$$

Τράπεζα θεμάτων

15. α) Αν $x, y > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma} + \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} \geq 6$$