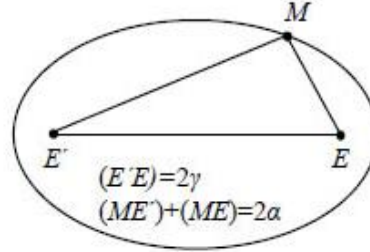


Η Έλλειψη

Ορισμός έλλειψης

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου.

Έλλειψη με **εστίες** τα σημεία E' και E ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$.



- Το παραπάνω σταθερό άθροισμα το συμβολίζουμε με 2α .
- Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και τη συμβολίζουμε με 2γ .
- Ισχύει ότι $2\alpha > 2\gamma \Leftrightarrow \alpha > \gamma$. Αν $\gamma = 0$, τότε τα σημεία E' και E συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο E και ακτίνα α .

Εξίσωση έλλειψης

1. Εστίες στον άξονα $x'x$

Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία:

$$E'(-\gamma, 0) \text{ και } E(\gamma, 0)$$

και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

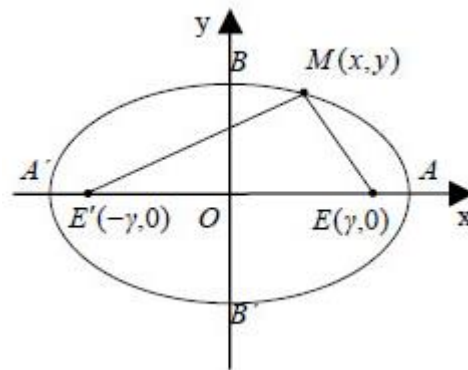
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Τα σημεία:

$$A'(-\alpha, 0), \quad A(\alpha, 0), \quad B'(0, -\beta), \quad B(0, \beta)$$

ονομάζονται **κορυφές** της έλλειψης.

Το τμήμα $A'A$ ονομάζεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης και έχει μήκος $A'A = 2\alpha$, ενώ το τμήμα $B'B$ ονομάζεται **μικρός άξονας** της έλλειψης και έχει μήκος $B'B = 2\beta$.



2. Εστίες στον άξονα $y'y$

Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία:

$$E'(0, -\gamma) \text{ και } E(0, \gamma)$$

και σταθερό άθροισμα 2α είναι:

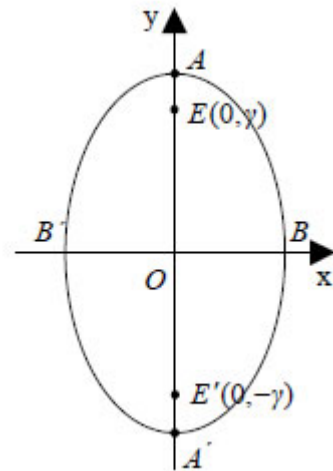
$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \text{ με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Τα σημεία:

$$A'(0, -\alpha), A(0, \alpha), B'(-\beta, 0), B(\beta, 0)$$

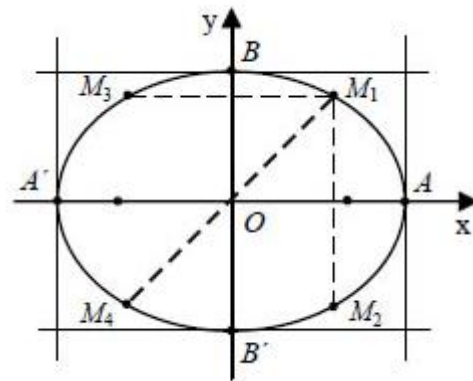
ονομάζονται **κορυφές** της έλλειψης.

Το τμήμα $A'A$ ονομάζεται **μεγάλος άξονας** της έλλειψης και έχει μήκος $A'A = 2\alpha$, ενώ το τμήμα $B'B$ ονομάζεται **μικρός άξονας** της έλλειψης και έχει μήκος $B'B = 2\beta$.



Συμμετρίες της έλλειψης

Η αρχή των αξόνων O είναι κέντρο συμμετρίας της έλλειψης και ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς το O σημεία της έλλειψης, για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα τα M_1 και M_4 , ονομάζεται **διάμετρος** της έλλειψης.



Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης.

Από τις παραπάνω συμμετρίες προκύπτει ότι αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει σε μια έλλειψη C , τότε και τα σημεία:

$$M_2(x_1, -y_1), M_3(-x_1, y_1) \text{ και } M_4(-x_1, -y_1)$$

ανήκουν στην έλλειψη C .

Εκκεντρότητα της έλλειψης

Έστω μια έλλειψη C με εστίες σε οποιονδήποτε άξονα. **Εκκεντρότητα** της έλλειψης C (συμβολικά ε) ονομάζουμε τον λόγο:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$$

Για την εκκεντρότητα της έλλειψης προκύπτει ο τύπος:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Από τον τύπο αυτόν συμπεραίνουμε ότι αν η εκκεντρότητα ε τείνει στο 1, τότε το πηλίκο β/α τείνει στο 0 και η έλλειψη είναι πιο «επιμήκης», τείνοντας να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα, ενώ αν η εκκεντρότητα ε τείνει στο 0, τότε το πηλίκο β/α τείνει στο 1 και η έλλειψη μοιάζει με κύκλο.

Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα ονομάζονται **όμοιες**.

Εφαπτομένες έλλειψης

- Η **εφαπτομένη** ε της έλλειψης:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

Ειδικότερα οι ευθείες $x = -\alpha$ και $x = \alpha$ είναι κατακόρυφες εφαπτομένες της έλλειψης C στα άκρα του μεγάλου άξονά της και οι ευθείες $y = \beta$ και $y = -\beta$ είναι οριζόντιες εφαπτομένες της έλλειψης C στα άκρα του μικρού άξονά της.

- Η **εφαπτομένη** ε της έλλειψης:

$$C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$$

Ειδικότερα οι ευθείες $x = -\beta$ και $x = \beta$ είναι κατακόρυφες εφαπτομένες της έλλειψης C στα άκρα του μικρού άξονά της και οι ευθείες $y = \alpha$ και $y = -\alpha$ είναι οριζόντιες εφαπτομένες της έλλειψης C στα άκρα του μεγάλου άξονά της.

Ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης

Η κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη ε μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M , διχοτομεί τη γωνία:

$$\widehat{E'ME}$$

όπου E' και E οι εστίες της.

