

Η Παραβολή

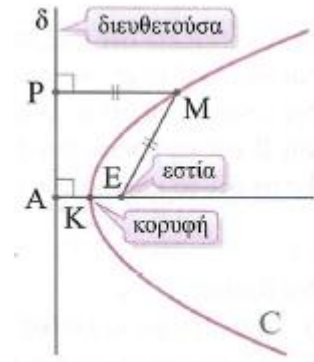
Ορισμός παραβολής

Θεωρούμε μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός αυτής.

Παραβολή C με **εστία** το σημείο E και **διευθετούσα** την ευθεία δ ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από το σημείο E και την ευθεία δ . Δηλαδή είναι:

$$ME = MP$$

Αν A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ , τότε το μέσο K του EA είναι σημείο της παραβολής και ονομάζεται **κορυφή** της παραβολής.



Εξίσωση παραβολής

- Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O την κορυφή της παραβολής και άξονα $x'x$ την ευθεία που διέρχεται από την εστία E και την κάθετη στη διευθετούσα δ . Αν στο παραπάνω σύστημα η εστία E έχει τετμημένη:

$$\frac{p}{2}$$

τότε η διευθετούσα δ έχει εξίσωση:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω παραβολή με εστία και διευθετούσα αντίστοιχα:

$$E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \text{ και } \delta: x = -\frac{p}{2}$$

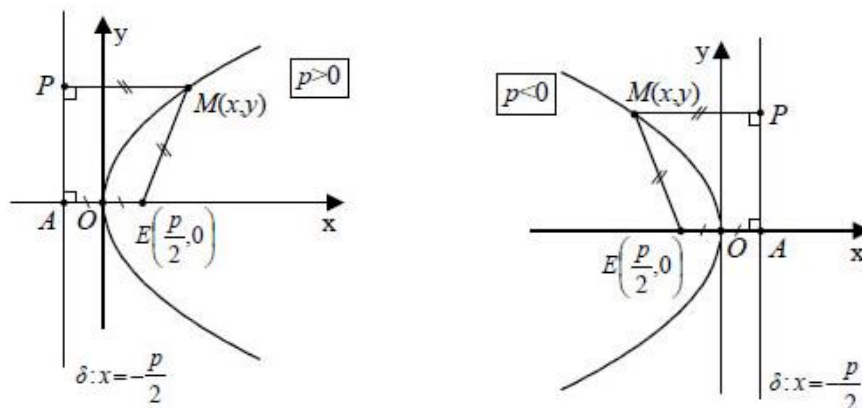
έχει εξίσωση:

$$y^2 = 2px$$

Ο αριθμός p ονομάζεται **παράμετρος** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα. Ισχύει δηλαδή:

$$|p| = d(E, \delta)$$

Ανάλογα με το πρόσημο της παραμέτρου p η γραφική παράσταση της παραβολής φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Από την εξίσωση $y^2 = 2px$ της παραβολής προκύπτουν τα εξής:

- Τα p και x (με $x \neq 0$) είναι ομόσημα. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E .
 - Αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή, τότε και το σημείο $M_2(x_1, -y_1)$ ανήκει στην ίδια παραβολή. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.
- Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O την κορυφή της παραβολής και άξονα $y'y$ την ευθεία που διέρχεται από την εστία E και την κάθετη στη διευθετούσα δ . Αν στο παραπάνω σύστημα η εστία E έχει τεταγμένη:

$$\frac{p}{2}$$

τότε η διευθετούσα δ έχει εξίσωση:

$$y = -\frac{p}{2}$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω παραβολή με εστία και διευθετούσα αντίστοιχα:

$$E\left(0, \frac{p}{2}\right) \text{ και } \delta: y = -\frac{p}{2}$$

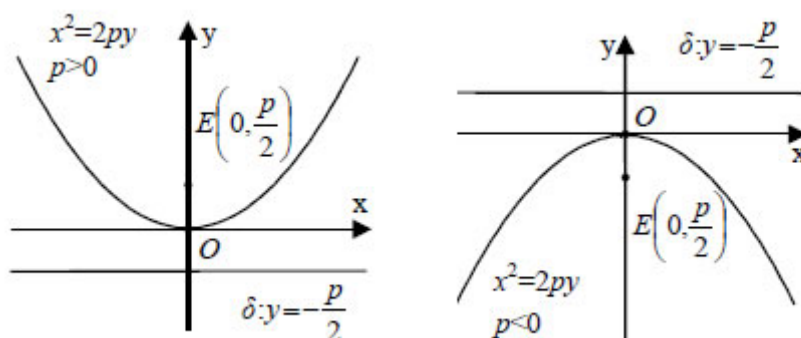
έχει εξίσωση:

$$x^2 = 2py$$

Και εδώ ο αριθμός p ονομάζεται παράμετρος της παραβολής και ισχύει ότι:

$$|p| = d(E, \delta)$$

Ανάλογα με το πρόσημο της παραμέτρου p η γραφική παράσταση της παραβολής φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Από την εξίσωση $x^2 = 2py$ της παραβολής προκύπτουν τα εξής:

- Τα p και y (με $y \neq 0$) είναι ομόσημα. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $x'x$ και η εστία E .
- Αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή, τότε και το σημείο $M_2(-x_1, y_1)$ ανήκει στην ίδια παραβολή. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.
- Η εξίσωση $x^2 = 2py$ ισοδύναμα γράφεται:

$$y = \frac{1}{2p}x^2$$

και παριστάνει τη γραφική παράσταση της $y = ax^2$.

Εφαπτομένη παραβολής

- Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

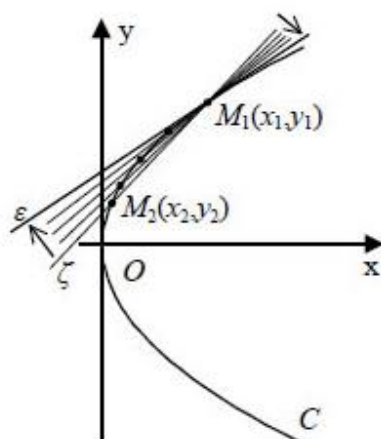
$$\varepsilon: yy_1 = p(x + x_1)$$

Στην κορυφή $O(0, 0)$ η εφαπτομένη της παραβολής είναι η ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$.

- Η εφαπτομένη της παραβολής $C: x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: xx_1 = p(y + y_1)$$

Στην κορυφή $O(0, 0)$ η εφαπτομένη της παραβολής είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$.



Ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής

Έστω C μια παραβολή με εστία E και ε η εφαπτομένη της C στο σημείο M_1 . Η ευθεία η που είναι κάθετη στην ε στο σημείο M_1 διχοτομεί τη γωνία $\widehat{EM_1t}$ που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t που είναι ομόρροπη της OE .

Δηλαδή είναι $\varphi_1 = \varphi_2$.

