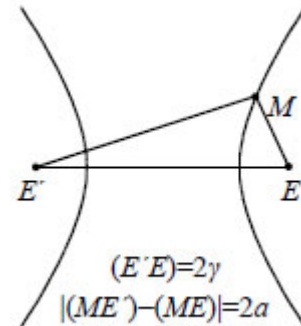


Η Υπερβολή

Ορισμός υπερβολής

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. **Υπερβολή** με **εστίες** τα σημεία E' και E ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $E'E$.



- Την παραπάνω σταθερή απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες, την παριστάνουμε με 2α .
- Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής και την παριστάνουμε με 2γ .
- Ισχύει ότι $2\alpha < 2\gamma \Leftrightarrow \alpha < \gamma$.

Εξίσωση υπερβολής

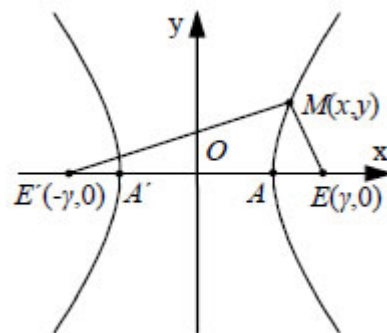
1. Εστίες στον άξονα $x'x$

Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία:

$$E'(-\gamma, 0) \text{ και } E(\gamma, 0)$$

και σταθερή διαφορά 2α είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$



- Τα σημεία $A'(-\alpha, 0)$ και $A(\alpha, 0)$ ονομάζονται **κορυφές** της υπερβολής και ισχύει ότι $A'A = 2\alpha$.
- Η υπερβολή C **δεν τέμνει τον άξονα $y'y$** .
- Από την εξίσωση της υπερβολής προκύπτει ότι:

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow (x \leq -\alpha \text{ ή } x \geq \alpha)$$

Άρα τα σημεία της C βρίσκονται εκτός της ταινίας που ορίζουν οι ευθείες $x = \alpha$ και $x = -\alpha$, γεγονός που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους.

2. Εστίες στον άξονα y'y

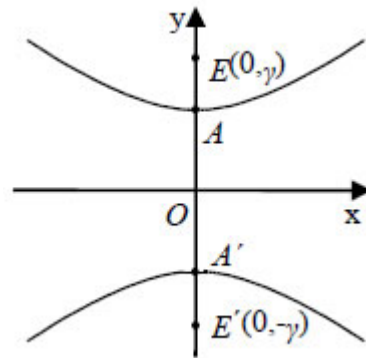
Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

- Τα σημεία $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ ονομάζονται **κορυφές** της υπερβολής και ισχύει ότι $A'A = 2\alpha$.
- Η υπερβολή C **δεν τέμνει τον άξονα x'x**.
- Από την εξίσωση της υπερβολής προκύπτει ότι:

$$|y| \geq \alpha \Leftrightarrow (y \leq -\alpha \text{ ή } y \geq \alpha)$$

Άρα τα σημεία της υπερβολής βρίσκονται εκτός της ταινίας που ορίζουν οι ευθείες $y = -\alpha$ και $y = \alpha$, οπότε η υπερβολή αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους.



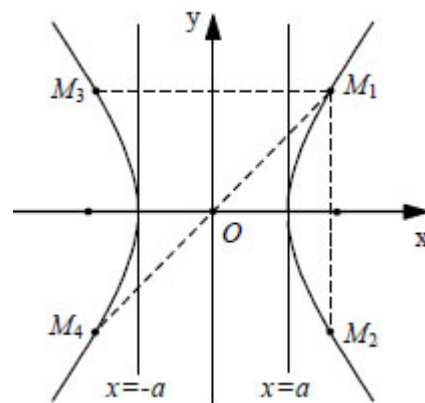
Ισοσκελής υπερβολή

Αν είναι $\alpha = \beta$, η υπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της είναι:

$$x^2 - y^2 = \alpha^2 \text{ ή } y^2 - x^2 = \alpha^2$$

Συμμετρίες υπερβολής

Αν $M_1(x, y)$ είναι ένα σημείο της C, τότε τα σημεία $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, y)$, $M_4(-x, -y)$ ανήκουν επίσης στην υπερβολή C, αφού οι συντεταγμένες των σημείων αυτών επαληθεύουν την εξίσωση της C. Αυτό σημαίνει ότι η υπερβολή C έχει τους άξονες y'y και x'x **άξονες συμμετρίας** και την αρχή των αξόνων **κέντρο συμμετρίας**. Το σημείο O, που είναι το μέσο της E'E, ονομάζεται και **κέντρο** της υπερβολής.



Ασύμπτωτες υπερβολής

- Μια ευθεία ϵ ονομάζεται **ασύμπτωτη** μιας γραμμής C , όταν έχει την εξής ιδιότητα: καθώς η τετμημένη ενός σημείου της C αυξάνεται απεριόριστα κατ' απόλυτη τιμή, η απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ϵ τείνει προς το μηδέν.
- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι ευθείες:

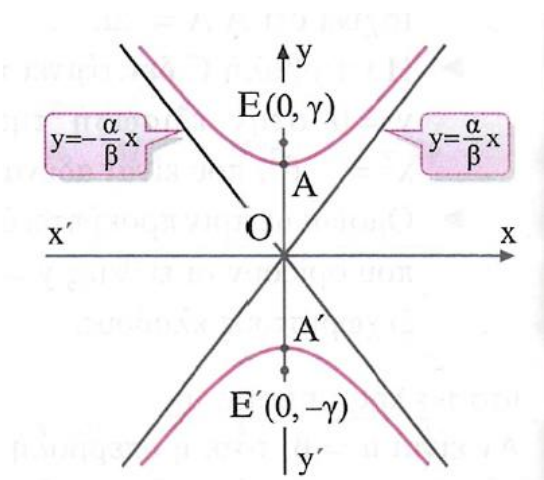
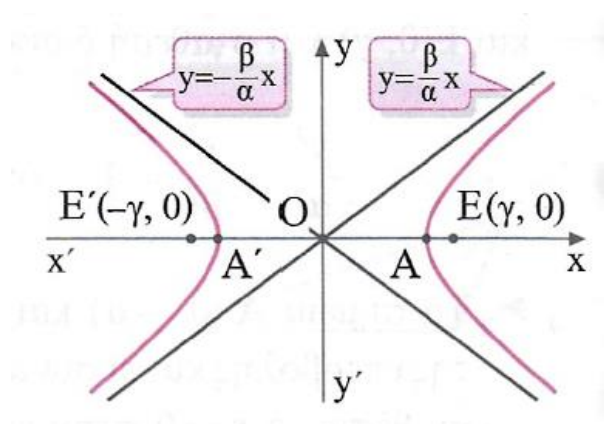
$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x$$

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής:

$$C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι ευθείες:

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}x$$



- Μια ισοσκελής υπερβολή έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = -x$ και $y = x$.

Ορθογώνιο βάσης υπερβολής

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής:

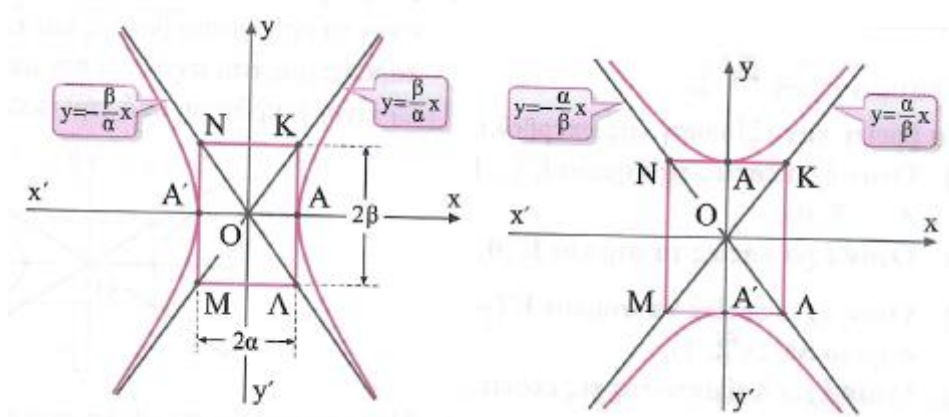
$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι φορείς των διαγωνίων του ορθογωνίου ΚΛΜΝ με κορυφές τα σημεία Κ(α, β), Λ(α, -β), Μ(-α, -β) και Ν(-α, β). Το ορθογώνιο αυτό ονομάζεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής C.

- Το ορθογώνιο βάσης ΚΛΜΝ της υπερβολής:

$$C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

έχει κορυφές τα σημεία Κ(β, α), Λ(β, -α), Μ(-β, -α) και Ν(-β, α).



Εκκεντρότητα υπερβολής

Έστω C μια υπερβολή με εστίες σε οποιονδήποτε άξονα. **Εκκεντρότητα** της υπερβολής C (συμβολικά ε) ονομάζουμε τον λόγο:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1$$

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής προκύπτει ο τύπος:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Γεωμετρικά, όσο πιο μικρή η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή η υπερβολή.

Μια ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Εφαπτομένες υπερβολής

- Η εφαπτομένη ε της υπερβολής:

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$

Ειδικότερα οι ευθείες $x = -\alpha$ και $x = \alpha$ είναι κατακόρυφες εφαπτομένες της υπερβολής C στις κορυφές της $A'(-\alpha, 0)$ και $A(\alpha, 0)$ αντίστοιχα.

- Η εφαπτομένη ε της υπερβολής:

$$C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: \frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

Ειδικότερα οι ευθείες $y = -\alpha$ και $y = \alpha$ είναι οριζόντιες εφαπτομένες της υπερβολής C στις κορυφές της $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ αντίστοιχα.

Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

Έστω μια υπερβολή C και E', E οι εστίες της. Η εφαπτομένη της υπερβολής C σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία:

$$\widehat{E'ME}$$

