

Τα μαθηματικά της Φυσικής

A. Πράξεις με δυνάμεις

1. Πολλαπλασιασμός δυνάμεων που έχουν την ίδια βάση

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

2. Διαίρεση δυνάμεων που έχουν την ίδια βάση

$$\frac{\alpha^x}{\alpha^y} = \alpha^{x-y}$$

3. Πολλαπλασιασμός δυνάμεων με διαφορετική βάση αλλά ίδιο εκθέτη

$$\alpha^x \cdot \beta^x = (\alpha \cdot \beta)^x$$

4. Διαίρεση δυνάμεων με διαφορετική βάση αλλά ίδιο εκθέτη

$$\frac{\alpha^x}{\beta^x} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$$

5. Ύψωση δύναμης σε εκθέτη

$$(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$$

6. Δύναμη με αρνητικό εκθέτη

$$\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x}$$

7. Δύναμη με εκθέτη τη μονάδα

$$\alpha^1 = \alpha$$

8. Δύναμη με εκθέτη το μηδέν

$$\alpha^0 = 1$$

B. κατασκευή γραφικών παραστάσεων

1. Κατασκευή γραφικής παράστασης την μορφής $\psi = \kappa x$, $\kappa > 0$ και σταθερό

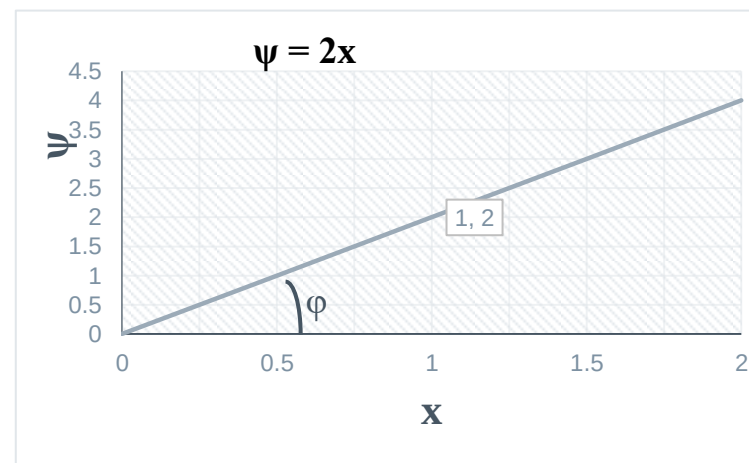
Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 2x$.

Η κατασκευή, γενικά, μιας γραφικής παράστασης απαιτεί έναν πίνακα τιμών. Δίνουμε τιμές στο x και με τη βοήθεια του τύπου της συνάρτησης βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του ψ .

Ο βαθμός μιας συνάρτησης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη τιμή του εκθέτη του x . Η συνάρτηση που ζητείται η γραφική της παράσταση, πρόκειται για συνάρτηση 1^{ου} βαθμού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία και για την κατασκευή της χρειάζονται 2 σημεία. Αν δεν απαγορεύεται η 1^η τιμή που δίνουμε στο x , είναι η τιμή 0, αν και $\psi = 0$ τότε η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Στις συναρτήσεις 1ου βαθμού, ο συντελεστής του x , ονομάζεται κλίση της ευθείας. Στο παράδειγμα η κλίση της ευθείας είναι 2 και αντιστοιχεί στην τιμή της εφαπτομένης της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία της γραφικής παράστασης με τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x , δηλαδή $\epsilon\phi\phi = 2$

$\psi = 2x$	
$x = 0$	$\psi = 2 \cdot 0 = 0$
$x = 1$	$\psi = 2 \cdot 1 = 2$



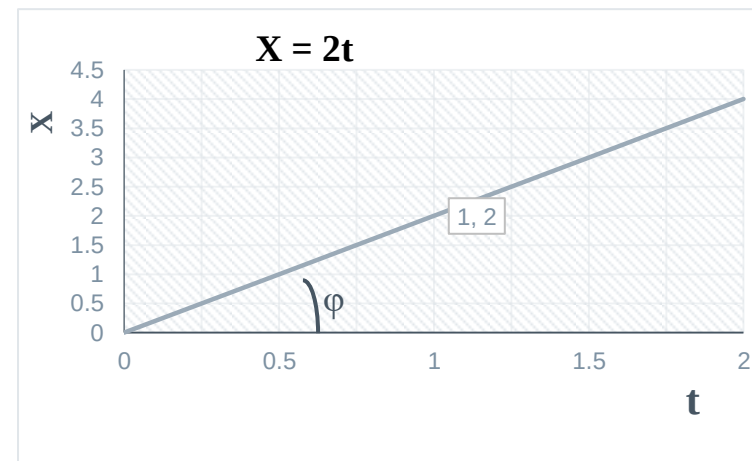
Στη φυσική, συναρτήσεις της μορφής $\psi = \kappa x$, συναντάμε στην:

- i. ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και συγκεκριμένα στον τύπο της μετατόπισης, $x = U \cdot t$, όπου x η μετατόπιση, με την προϋπόθεση ότι το κινητό βρίσκεται στην αφετηρία και t η διάρκεια κίνησης, με το χρονόμετρο να είναι αρχικά μηδενισμένο. Παράδειγμα, $x = 2t$. Το 2 ο συντελεστής του t , είναι η κλίση της ευθείας και αντιστοιχεί στην ταχύτητα, U , του κινητού,
- ii. ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και συγκεκριμένα στον τύπο της ταχύτητας, $U = a \cdot t$. Παράδειγμα $U = 2 \cdot t$, όπου U η ταχύτητα του κινητού και t η διάρκεια κίνησης, με το χρονόμετρο να είναι αρχικά μηδενισμένο. Το 2 ο συντελεστής του t , είναι η κλίση της ευθείας και αντιστοιχεί στην επιτάχυνση, a , του κινητού.

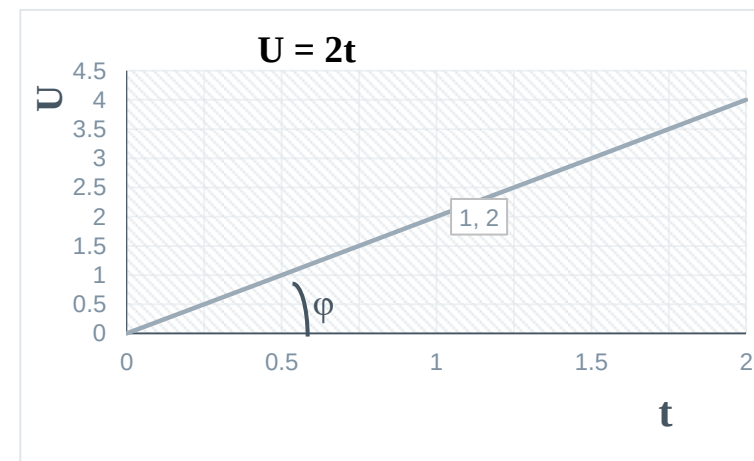
Η αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής συνάρτησης και του τύπου της φυσικής, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\psi = \kappa x$	Γενική μορφή	Μαθηματική συνάρτηση
$\psi = 2x$	Ειδική μορφή	
$x = Ut$	Γενική μορφή	ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, x = μετατόπιση, t = χρονική διάρκεια και U = ταχύτητα
$x = 2t$	Ειδική μορφή	ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $U = 2 \text{ m/s}$. Το ρόλο του μέτρου της ταχύτητα U τον παίζει το 2.
$U = at$	Γενική μορφή	ευθύγρ. ομαλά επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα, a = επιτάχυνση
$U = 2t$	Ειδική μορφή	ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Το ρόλο του μέτρου της επιτάχυνσης a τον παίζει το 2.

Διάγραμμα μετατόπισης, x , χρόνου, t , στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η κλίση της ευθείας δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας φ για την οποία ισχύει $\text{εφ}\varphi = 2$, αντιστοιχεί στην ταχύτητα, U , του κινητού.



Διάγραμμα ταχύτητας, U , χρόνου, t , στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η κλίση της ευθείας δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας φ για την οποία ισχύει $\text{εφ}\varphi = 2$, αντιστοιχεί στην επιτάχυνση, a , του κινητού.

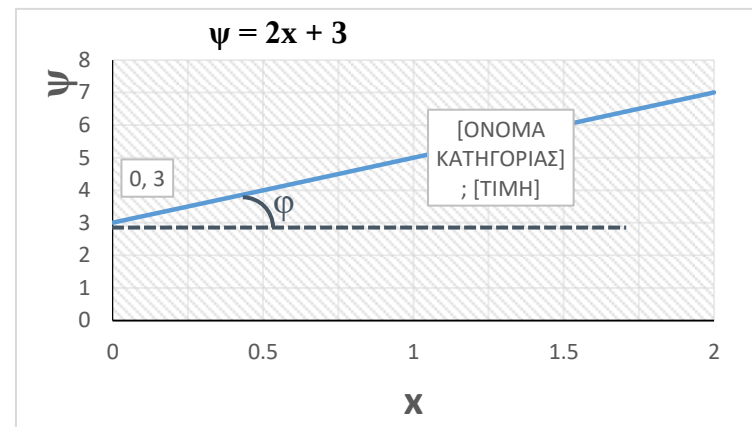


2. $\psi = \kappa x + \lambda$, ή $\psi = \lambda + \kappa x$ με $\kappa, \lambda > 0$ και σταθερά

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 3 + 2x$

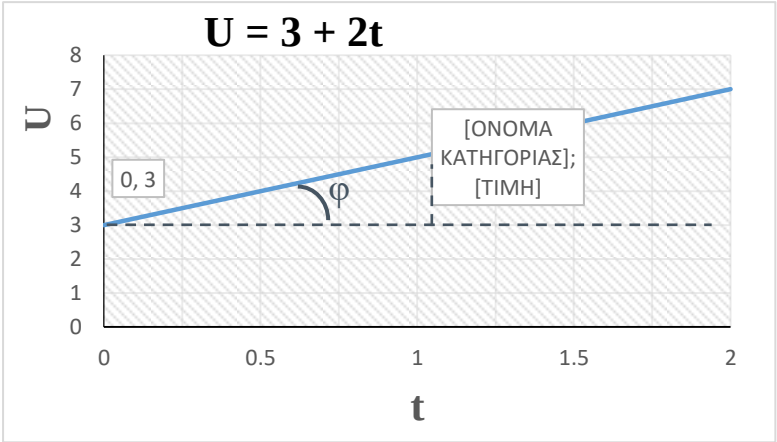
Πρόκειται για συνάρτηση 1ου βαθμού, ο βαθμός της συνάρτησης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη τιμή του εκθέτη του x . Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο εκθέτης του x είναι το 1, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία. Ο συντελεστής του x , είναι η κλίση της ευθείας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κλίση της ευθείας είναι 2 και αντιστοιχεί στην τιμή της εφαπτομένης που σχηματίζει η ευθεία της γραφικής παράστασης με τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x ή μιας παράλληλης προς αυτόν, δηλαδή $\epsilon\phi\phi = 2$.

$\psi = 2x + 3$	
$x = 0$	$\psi = 2 \cdot 0 + 3 = 3$
$x = 1$	$\psi = 2 \cdot 1 + 3 = 5$



Στη φυσική, συνάρτηση της μορφής $\psi = \lambda + \kappa x$ συναντάμε στην:

i. ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα και συγκεκριμένα στον τύπο της ταχύτητας, $U = U_0 + at$, όπου U_0 η αρχική ταχύτητα του κινητού και t η διάρκεια κίνησης. Παράδειγμα $U = 3 + 2t$, Ο συντελεστής του t το 2, είναι η κλίση της ευθείας και αντιστοιχεί στην επιτάχυνση, a , του κινητού που έχει αρχική ταχύτητα $U_0 = 3$. Στο διάγραμμα το ζευγάρι $(0,3)$ δηλώνει ότι τη χρονική στιγμή 0, αρχή μελέτης της κίνησης, το κινητό έχει ταχύτητα 3m/s.



Η αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής συνάρτησης και του τύπου της φυσικής, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

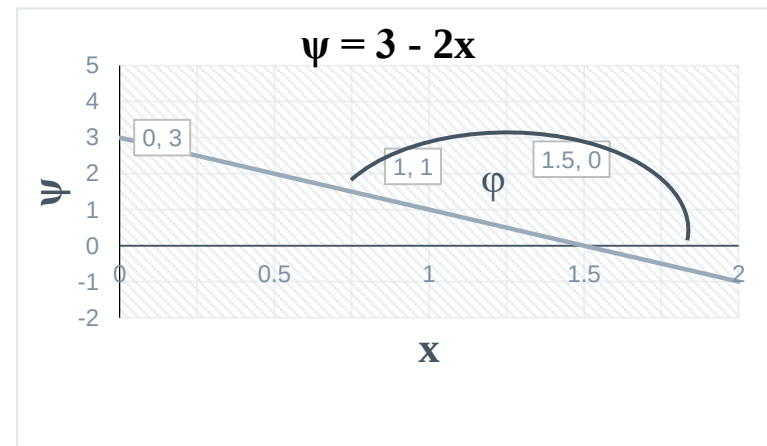
$\psi =$	$\lambda + \kappa x$	Μαθηματική συνάρτηση	
$\psi =$	$3 + 2x$		
$U =$	$U_0 + at$	Γενική μορφή	ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, με αρχική ταχύτητα
$U =$	$3 + 2t$	Ειδική μορφή	ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, με αρχική ταχύτητα $U_0 = 3\text{m/s}$ και επιτάχυνση $a = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Το ρόλο του μέτρου της επιτάχυνσης a τον παίζει το 2.

3. $\psi = \lambda - \kappa x$, $\lambda, \kappa > 0$ και κ, λ σταθερά

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 3 - 2x$

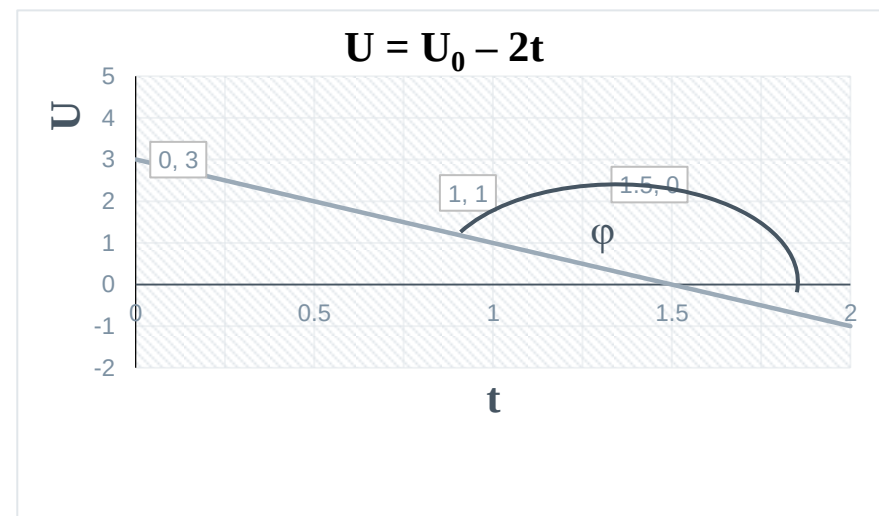
Πρόκειται για συνάρτηση 1ου βαθμού, ο βαθμός της συνάρτησης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη τιμή του εκθέτη του x . Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο εκθέτης του x είναι το 1, και η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία. Ο συντελεστής του x , ονομάζεται κλίση της ευθείας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κλίση της ευθείας είναι -2 και αντιστοιχεί στην τιμή της εφαπτομένης που σχηματίζει η ευθεία της γραφικής παράστασης με τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x . Δηλαδή $\epsilon\phi\phi = -2$, πρόκειται για γωνία αμβλεία.

$\psi = 3 - 2x$	
$x = 0$	$\psi = +3 - 2 \cdot 0 = 3$
$x = 1$	$\psi = +3 - 2 \cdot 1 = 1$



$\psi =$	$\lambda - \kappa x$	Μαθηματική συνάρτηση	
$\psi =$	$3 - 2x$		
$U =$	$3 - 2t$	Ειδική μορφή	ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα $U_0 = 3\text{m/s}$ και επιβράδυνση $a = 2\frac{m}{s^2}$

Διάγραμμα ταχύτητας, U , χρόνου, t , στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Η κλίση της ευθείας δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας φ για την οποία ισχύει $\tan \varphi = -2$, αντιστοιχεί στην επιτάχυνση, a , του κινητού.

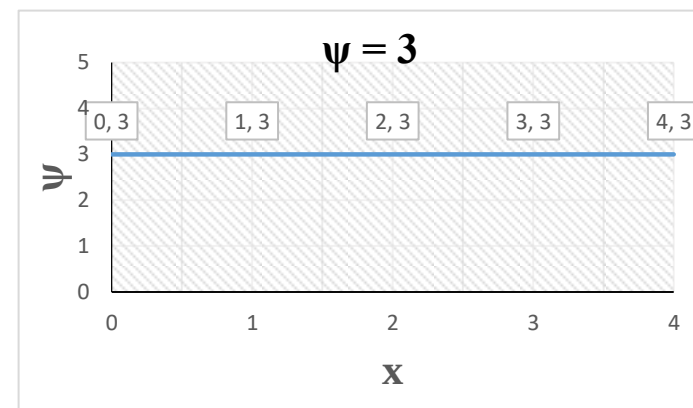


4α. $\psi = \kappa$, $\kappa > 0$, $\kappa = \text{σταθερό}$

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 3$.

Πρόκειται για μια συνάρτηση σταθερή. η τιμή του ψ είναι ανεξάρτητη από την τιμή του x , Η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x και από το πάνω μέρος του.

$\psi = 3$	
$x = 0$	$\psi = 3$
$x = 1$	$\psi = 3$



Στη φυσική, συνάρτηση της μορφής $\psi = \kappa$ με $\kappa > 0$ συναντάμε στην:

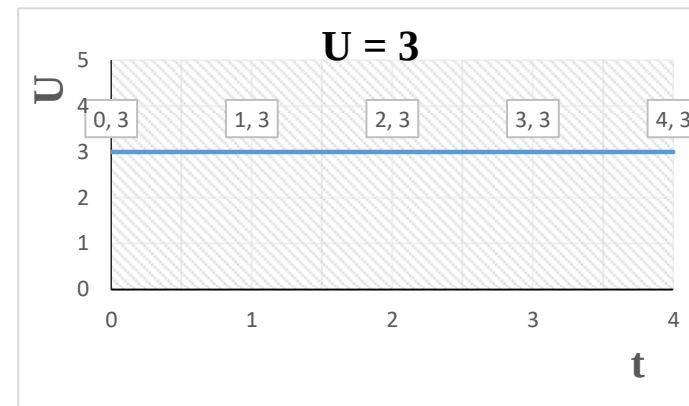
- i. ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου
- ii. ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, στο διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου.

Η αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής συνάρτησης και του τύπου της φυσικής, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

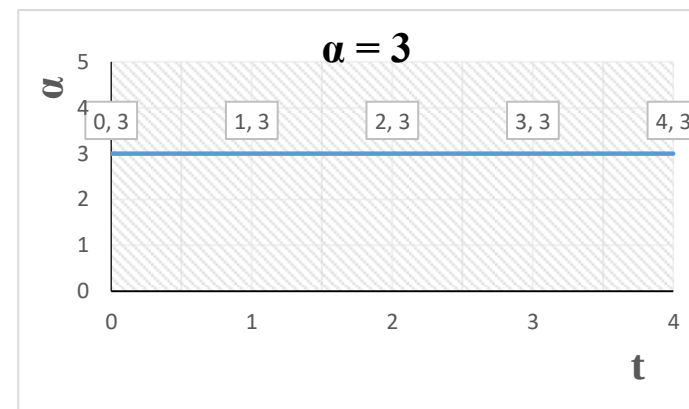
$\psi = \kappa$	Γενική μορφή	Μαθηματική μορφή
$\psi = 3$	Ειδική μορφή	
$U = \text{σταθερό}$	Γενική μορφή	ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
$U = 3$	Ειδική μορφή	ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
$a = \text{σταθερό}$	Γενική μορφή	ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
$a = 3 > 0$	Ειδική μορφή	ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Στη φυσική, συνάρτηση της μορφής $\psi = \kappa$ με $\kappa > 0$ συναντάμε στην:

i. ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου



ii. ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, στο διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου



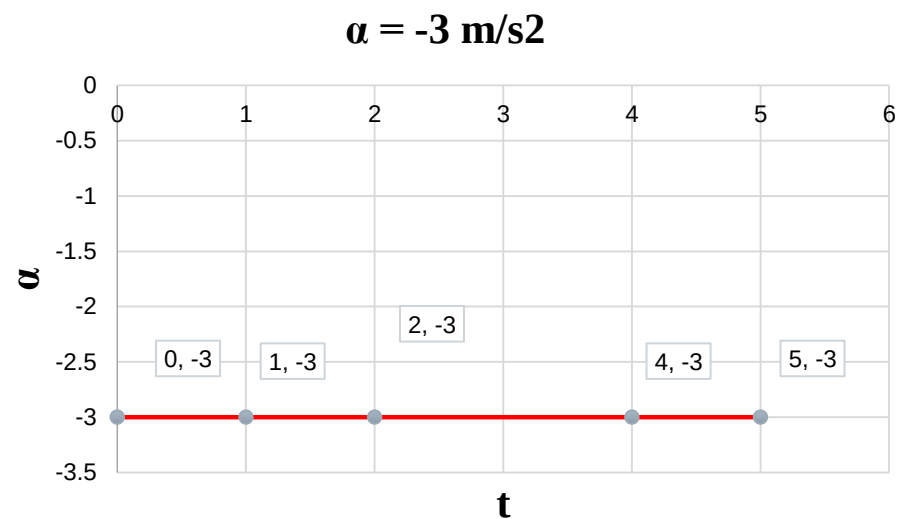
4β. $\psi = \kappa$, $\kappa < 0$, $\kappa = \text{σταθερό}$

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 3$.

Πρόκειται για μια συνάρτηση σταθερή. η τιμή του ψ είναι ανεξάρτητη από την τιμή του x , Η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x και από το κάτω μέρος του.

Στη φυσική, συνάρτηση της μορφής $\psi = \kappa$ με $\kappa < 0$ συναντάμε στην:

- i. *ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, στο διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου, με $\alpha = -3\text{m/s}^2$.*

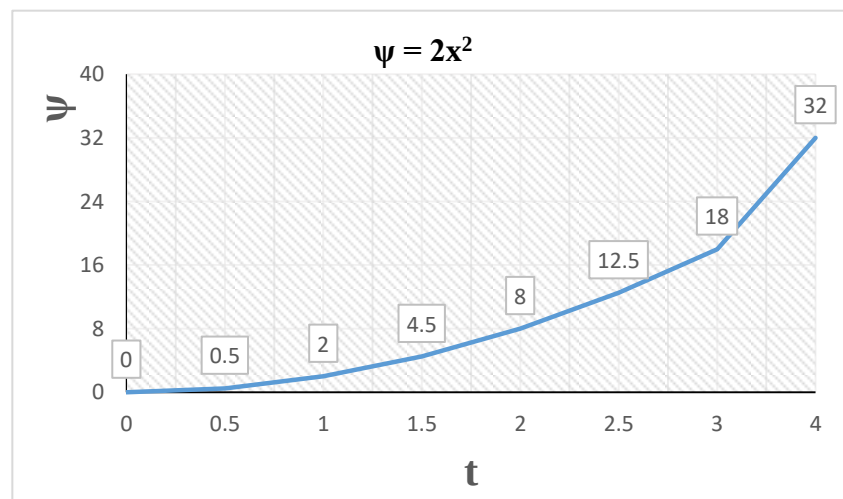


5. $\psi = \kappa x^2$, $\kappa > 0$ και σταθερό

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 2x^2$.

Πρόκειται για συνάρτηση 2^{ου} βαθμού, ο βαθμός της συνάρτησης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη τιμή του εκθέτη του x . Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο εκθέτης του x είναι το 2, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι καμπύλη, παραβολή, και για την κατασκευή της χρειάζονται όσον το δυνατόν περισσότερα σημεία, τουλάχιστον 6 με 7.

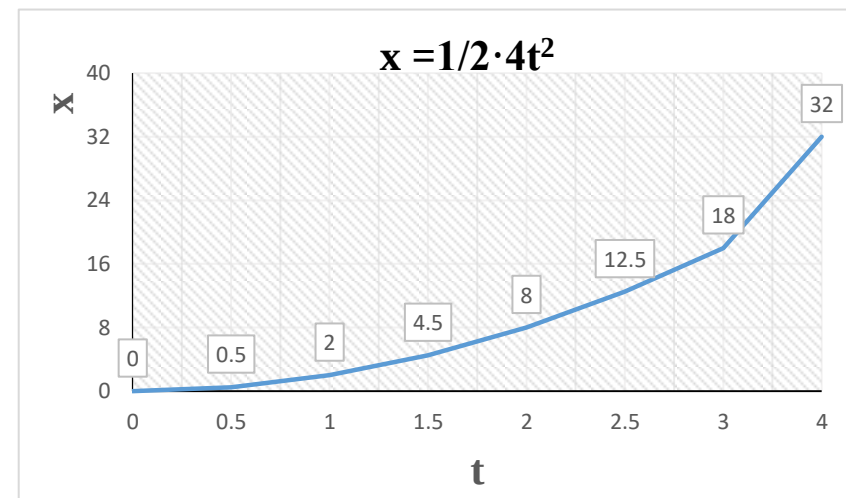
$\psi = 2x^2$	
$x = 0$	$\psi = 2 \cdot 0^2 = 0$
$x = 1$	$\psi = 2 \cdot 1^2 = 2$
$x = 1,5$	$\psi = 2 \cdot 1,5^2 = 4,5$
$x = 2$	$\psi = 2 \cdot 2^2 = 8$
$x = 2,5$	$\psi = 2 \cdot 2,5^2 = 12,5$
$x = 3$	$\psi = 2 \cdot 3^2 = 18$
$x = 4$	$\psi = 2 \cdot 4^2 = 32$



Στη φυσική, συνάρτηση της μορφής $\psi = \kappa x^2$, συναντάμε στη ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, $x = \frac{1}{2}at^2$, όπου a η επιτάχυνση και t η διάρκεια κίνησης.

Η αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής συνάρτησης και του τύπου της φυσικής, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

$\psi =$	κx^2	Γενική μορφή	
$\psi =$	$2 x^2$	Ειδική μορφή	
$x =$	$\frac{1}{2}a t^2$	Γενική μορφή	Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα
$x =$	$\frac{1}{2}4 t^2$	Ειδική μορφή	

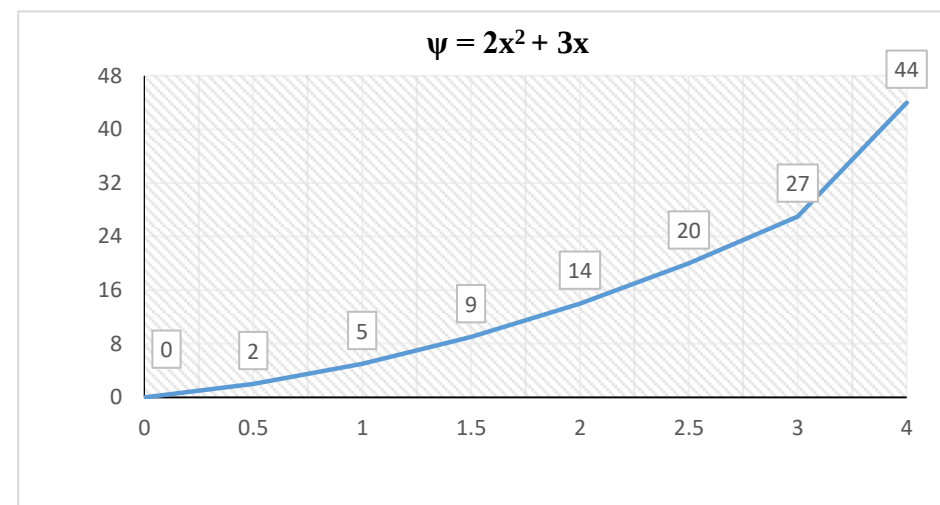


6, $\psi = \kappa x^2 + \lambda x$, $\kappa, \lambda > 0$

Παράδειγμα: Να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = 2x^2 + 3x$.

Πρόκειται για συνάρτηση 2^{ου} βαθμού, ο βαθμός της συνάρτησης καθορίζεται από τη μεγαλύτερη τιμή του εκθέτη του x . Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο μεγαλύτερος εκθέτης του x είναι το 2, η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι καμπύλη, παραβολή.

$\psi = 3x + 2x^2$	
$x = 0$	$\psi = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 = 0$
$x = 0,5$	$\psi = 3 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5^2 = 2$
$x = 1$	$\psi = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = 5$
$x = 1,5$	$\psi = 3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5^2 = 9$
$x = 2$	$\psi = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 14$
$x = 2,5$	$\psi = 3 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5^2 = 20$
$x = 3$	$\psi = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 27$
$x = 4$	$\psi = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 = 44$



Στη φυσική, συνάρτηση της μορφής $\psi = \lambda x + \kappa x^2$ συναντάμε στη ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα, $x = U_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, προσοχή στη σειρά των όρων, όπου U_0 η αρχική ταχύτητα, a η επιτάχυνση και t η διάρκεια κίνησης.

Η αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής συνάρτησης και του τύπου της φυσικής, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\psi =$	$\kappa \ x^2 + \lambda x$	Γενική μορφή	
$\psi =$	$2 \ x^2 + 3x$	Ειδική μορφή	
$\psi =$	$\frac{1}{2} a \ t^2 + U_0 t$	Γενική μορφή	Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα. Στον τύπο της φυσικής έχει αλλάξει η σειρά των όρων. Είναι πλέον διαταγμένοι κατά τις κατιούσες δυνάμεις του t.
$\psi =$	$\frac{1}{2} 4 \ t^2 + 3t$	Ειδική μορφή	

