ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. Πράξεις - Ταυτότητες

1. Δίνονται: $x=\left[\dfrac{2^{11}\left(2^{4}\right)^{-3}}{\left(2^{-3}\right)^{2}}\right]:\left(\dfrac{1}{2^{-18}}\cdot\dfrac{1}{2^{12}}\right)$, $y=\dfrac{4^{5}\cdot 9^{6}}{6^{12}}\cdot\left[-(-1)^{2012}\right]$ και $A=\dfrac{\left(x^{4}\cdot y^{-3}\right)^{3}\cdot\left(x^{2}\cdot y\right)^{-5}}{\left[x^{3}\cdot(y^{2})^{-4}\right]^{2}}$

α) Να βρείτε τις τιμές των x και y.

β) Αν $x=\dfrac{1}{2}$ και $y=-\dfrac{1}{4}$ τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α) $\dfrac{x^{3}+2x^{2}-x-2}{x^{2}+3x+2}$ β) $\dfrac{9\alpha^{3}+27\alpha^{2}-\alpha-3}{9\alpha^{2}-1}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=\dfrac{\left(\dfrac{1}{\alpha^{2}}+\dfrac{1}{\beta^{2}}+\dfrac{1}{\alpha\beta}\right)\alpha^{6}\beta^{2}-\alpha^{6}-\alpha^{5}\beta}{\alpha^{4}\beta}$ $B=\dfrac{x^{4}-1}{x^{3}-4x}\cdot\left(\dfrac{x^{3}-x}{x^{2}-2x}\right)^{-1}$ $\Gamma=\dfrac{\alpha+\alpha^{-1}-1}{\alpha^{-1}-1}\cdot\dfrac{\alpha^{2}-1}{\alpha^{3}+1}$

4. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{2}-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^{2}=\alpha\beta$

β) $(\mu+\nu)^{2}-(\mu-\nu)^{2}+(\mu+\nu)(\mu-\nu)=\mu(2\nu+\mu)+\nu(2\mu-\nu)$

5. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^{2}-(\alpha-\beta-\gamma)^{2}+(\alpha+\beta-\gamma)^{2}-(\alpha-\beta+\gamma)^{2}=8\alpha\beta$

β) $(\alpha^{4}-\beta^{4})+2\beta(\alpha^{3}+\beta^{3})-(\alpha+\beta)^{2}(\alpha-\beta)^{2}=2\alpha^{2}\beta(\alpha+\beta)$

6. Να γίνουν οι πράξεις

α) $(x^{3}+2y^{2})^{2}-(y^{2}+2x^{3})^{2}+(x^{3}-2y^{2})(x^{3}+2y^{2})$

β) $\chi^{2}(\psi-\omega)^{3}+\psi^{2}(\omega-\chi)^{3}+\omega^{2}(\chi-\psi)^{3}$

γ) $(2\chi+5)^{2}-(\chi-5)^{2}+(3\chi-1)^{2}-(2\chi+1)^{2}-(2\chi+3)(2\chi-3)$

δ) $(\chi+\psi+\omega).[(\chi-\psi)^{2}+(\psi-\omega)^{2}+(\omega-\chi)^{2}]$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha^{2}+\chi^{2}+\psi^{2})(\chi^{2}+\alpha^{2}+1)-(2\alpha\chi+\psi)^{2}=(\alpha^{2}-\chi^{2})^{2}+(\alpha-\chi\psi)^{2}+(\chi-\alpha\psi)^{2}$ (Lagrange)

ii) $(\alpha+\beta)^{3}-\alpha^{3}-\beta^{3}=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ (Cauchy)

iii) $\alpha^{4}+\beta^{4}+\gamma^{4}-2(\alpha^{2}\beta^{2}+\beta^{2}\gamma^{2}+\gamma^{2}\alpha^{2})=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$

(De Moivre)

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(\alpha-\beta)^{3}+(\beta-\gamma)^{3}+(\gamma-\alpha)^{3}$ β) $(3x-2y)^{3}+(y-2x)^{3}+(y-x)^{3}$

γ) $x^{2}+2xy-\omega^{2}+4\omega+y^{2}-4$

9. Αν $x+\frac{1}{x}=4$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A=x^2+\frac{1}{x^2}$ $B=x^3+\frac{1}{x^3}$ $\Gamma=x^4+\frac{1}{x^4}$

10. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ δείξετε ότι $\frac{\alpha^4}{\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta^4}{\gamma^3+\alpha^3-3\alpha\beta\gamma}+\frac{\gamma^4}{\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta\gamma}=0$

Β. Ανισότητες

11. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\geq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$ β) $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\geq\alpha+\frac{1}{\alpha},\alpha\neq 0$

12. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν αβ<0 τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$ β) Αν αβ>0 τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$

13. Αν α, β>0 να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}$ β) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$

14. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, για κάθε α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$

15. Αν α, β, γ>0 να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)(\alpha+\beta)\geq 4$ β) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)(\alpha+\beta+\gamma)\geq 9$

16. Αν α, β>0 να αποδείξετε ότι: $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^2\geq 8$

17. Αν $-2<\alpha<-1$ και $-4<\beta<-3$, να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της καθεμίας από τις παραστάσεις:

α) 4α-2β+1 β) 2-3αβ γ) $2\alpha^2+\beta^2$ δ) $\beta^2-\alpha^3$ ε) $1-\frac{\alpha}{\beta}$

18. Αν $1<x<\frac{4}{3}$ και $-2<y<\frac{3}{4}$, να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης: $A=x^2-5y+2$

19. Αν είναι $(2x-3y+1)^2+(3x-3y+9)^2=0$, τότε να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί x και y.

20. Αν ισχύει: $\alpha^2+\beta^2+13=2(3\beta-2\alpha)$, τότε να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

Γ. Απόλυτη Τιμή

21. Αν $-3 < x < 1$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |4-|x-1||$

22. Αν $\alpha<1<\beta$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = 3 - |4-2\alpha| + |1+3\beta|$

23. Αν $\alpha<3<\beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $A = |3-\alpha| + |3-\beta| - |\alpha-\beta|$ β) $B = |\alpha-\beta| - |5-\alpha| - |1-\beta|$

24. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα : i) $\dfrac{4|x|+2x^2}{3|x|+6}$ ii) $\dfrac{x^2-4}{5|x|+10}$

25. Για τις διάφορες τιμές του x να εκφράσετε τις παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές
α) $A = |x-1|$ β) $B = |2-x|$ γ) $\Gamma = |3x-1|$

26. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $A = |x-1| - 3|x+3|$ β) $B = 2|x+1| - 3|2x-1|$

27. Αν $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x| - y|y| = 0$ να αποδείξετε ότι : $|x| = |y|$.

28. Αν $\alpha, \beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι : $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$.

29. Να βρείτε τα x,y όταν: $x^2 + y^2 + 29 \leq 10|x| + 4|y|$

30. Να γράψετε την παράσταση: $A = |x-|x|| + |x+|x||$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

31. Να αποδείξετε ότι: $A = \dfrac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|} = \begin{cases} x, & \text{αν } |x|<1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } |x|>1 \end{cases}$

32. Αν $|x|<3$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=|x-3|+2|x-4|-|x+3|$

33. Αν $|x|\leq 1$ και $|y|\leq 2$, να αποδείξετε ότι: α) $|2x-3y|\leq 8$ β) $|3x-y+1|\leq 6$

34. Αν $|x-4|<1$ και $|y-7|<2$, να βρείτε που παίρνει τιμές η παράσταση: $A = |x+y-11|$

35. Αν $x\neq\pm y$ να αποδείξτε ότι: $\dfrac{|x|}{|x+y|} + \dfrac{|y|}{|x-y|} \geq 1$

36. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 \neq \beta^2$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{|\alpha|-|\beta|}{||\alpha|-|\beta||} + \dfrac{||\alpha|-|\beta||}{|\alpha-\beta|} + \dfrac{|\alpha+\beta|}{|\alpha|+|\beta|} \leq 3$

37. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\beta| + \alpha\beta \geq |\alpha|\cdot\beta + \alpha\cdot|\beta|$

Δ. Ρίζες πραγματικών αριθμών

38. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $5\sqrt{150}+4\sqrt{24}-2\sqrt{6}+\sqrt{54}$ β) $8\sqrt{7}-3\sqrt{175}+5\sqrt{28}-2\sqrt{63}$

γ) $\sqrt{2}\sqrt[3]{9}\sqrt[4]{243}$ δ) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt[5]{5}}}$

39. Δείξτε ότι : $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

40. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}$

41. Να γίνουν τα κλάσματα με ρητό παρονομαστή

i) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ii) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ iii) $\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2}}$ iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ v) $\dfrac{5}{1-\sqrt[3]{2}}$

42. Να γίνουν οι πράξεις: α) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ β) $\dfrac{3}{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{3}{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}$

43. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$A=\left(\sqrt{32}+\sqrt{45}-\sqrt{98}\right)\left(\sqrt{72}+\sqrt{80}-\sqrt{8}\right)$ $B=\left(\sqrt{112}-\sqrt{7}+\sqrt{48}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{48}\right)$

$\Gamma=\dfrac{3\sqrt{12}+8+\sqrt{20}-2\sqrt{8}}{3\sqrt{27}+\sqrt{45}-2\sqrt{18}+12}$ $\Delta=\sqrt{\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{4}}-\sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{4}}$

44. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με την βοήθεια μιας ρίζας.

α) $\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[8]{3\cdot\sqrt{3}}}$ β) $5\cdot\sqrt[4]{25\sqrt[3]{25\sqrt{5}}}$

45. Αν $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\gamma=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ και $\delta=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ τότε υπολογίστε το $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$.

46. Αν $x>y>0$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+\sqrt[3]{y\sqrt{y}}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-y}=x-y$

47. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $B=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{19+2\sqrt{48}}$

48. Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\le\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\dfrac{\beta^2}{\alpha}}$

49. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2^7}}}\cdot\sqrt[8]{8}$ και $\beta=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[6]{2\sqrt{2}+3}$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

β) Αν $x=\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}}$, $y=\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}$ και $w=\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}}$ τότε υπολογίστε το $x\cdot y\cdot w$