

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘ/ΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΤΟ 2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΓΟΠ 1)

Θέμα 1^ο : α) Σχολικό βιβλίο , σελ.128 – 129 .

β) Σ Λ Λ .

Θέμα 2^ο α) Καταρχάς , $A_f = \mathbb{R}$. Επίσης , η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο

των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x, e^x , άρα και συνεχής σε αυτό .

$$\text{Έτσι , } f'(x) = (x \cdot e^x)' = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (x + 1) .$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 .$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 .$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = e$.

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{Άρα } f''(x) = \dots = e^x \cdot (x + 2) .$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.

Παρουσιάζει σημείο καμπής (σ.κ.) στο 2 το $f(2) = 2e^2$.

γ) Προφανώς η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες , αφού δεν υπάρχουν ακραίες τιμές διαστημάτων του π.ο. , ούτε και σημεία ασυνέχειας .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = -\infty \cdot 0 \text{ (απροσδιοριστία)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

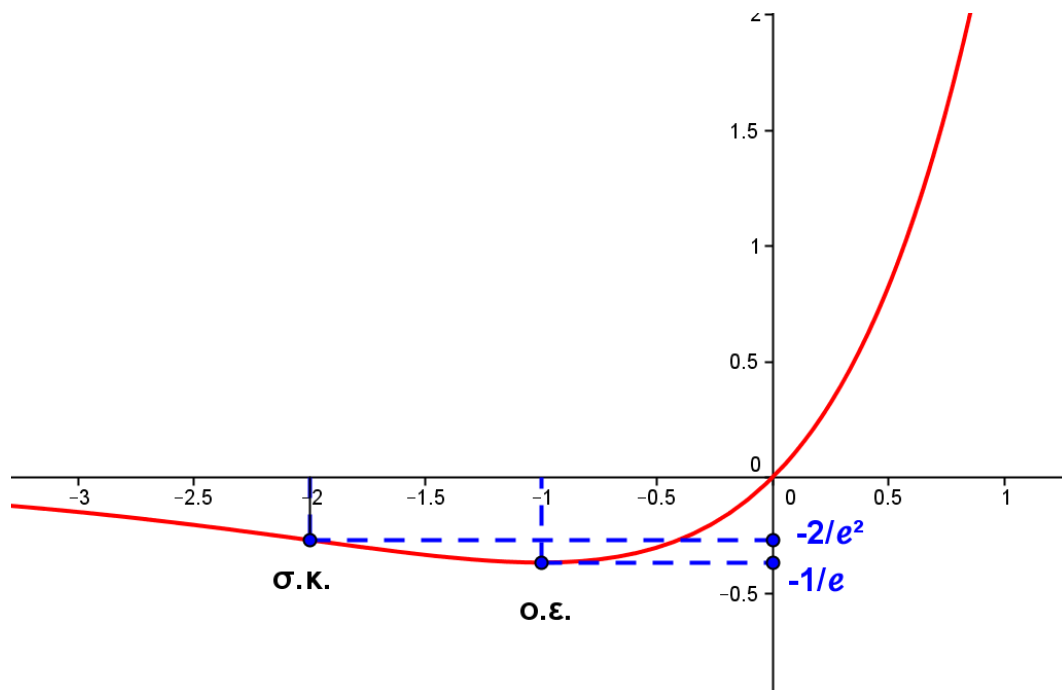
Άρα , η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Επομένως , δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη της f , στο $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$. Επομένως , δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Δεν υπάρχει , συνεπώς , πλάγια ασύμπτωτη της f , στο $+\infty$.

δ) Η γραφική παράσταση της f : Παρατηρούμε , επίσης , ότι η f διέρχεται από το σημείο $(0, f(0)) = (0,0)$. Λαμβάνοντας υπόψιν τα προηγούμενα , έχουμε:



Θέμα 3^ο : α) Παρατηρούμε ότι $f(1) = \ln 1 - a \cdot 1 + a = 0$

Άρα $f(x) \leq f(1)$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Επομένως , η f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$, που είναι εσωτερικό του διαστήματος $(0, +\infty)$ και

στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη . Από Θ. Fermat είναι $f'(1) = 0$.

$$\text{Όμως, } f'(x) = (\ln x - ax + a)' = \frac{1}{x} - a \Rightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

β) i) Άρα $f'(x) = \frac{1-x}{x}, x > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
1-x	+	+	0	-
x	-	0	+	+
f'(x)	-	+	0	-
f(x)				

Τ.Ε.

Τ.Μ.

β) ii) Η ανίσωση παίρνει τη μορφή : $\ln(\lambda^2 + 2) - \ln(2\lambda^2 + 1) < 1 - \lambda^2$,

η οποία έχει νόημα , αφού $\lambda^2 + 2 > 0$ και $2\lambda^2 + 1 > 0$.

Παρατηρούμε ότι $f(\lambda^2 + 2) = \ln(\lambda^2 + 2) - (\lambda^2 + 2) + 1$

$f(2\lambda^2 + 1) = \ln(2\lambda^2 + 1) - (2\lambda^2 + 1) + 1$. Οπότε ,

$f(\lambda^2 + 2) - f(2\lambda^2 + 1) = \dots = \ln(\lambda^2 + 2) - \ln(2\lambda^2 + 1) - 1 + \lambda^2$

Η αρχική ανίσωση παίρνει λοιπόν , ισοδύναμα, τη μορφή :

$f(\lambda^2 + 2) - f(2\lambda^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow f(\lambda^2 + 2) < f(2\lambda^2 + 1)$ (1) .

Επειδή $\lambda^2 + 2 \geq 2 > 1$ και $2\lambda^2 + 1 \geq 1$, η f είναι γν. φθίνουσα ,

άρα η (1) γράφεται , ισοδύναμα , $\lambda^2 + 2 > 2\lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 0 > \lambda^2 - 1$.

Τελικά , η ανίσωση ισχύει για $-1 < \lambda < 1$.

Θέμα 4^ο: **α)** Καταρχάς , η f ως παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, είναι και συνεχής σε

αυτό . Άρα , είναι συνεχής και σε κάθε υποσύνολό του , της μορφής

$[0, x], x \in (0, +\infty)$. Προφανώς , η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$.

ισχύουν , λοιπόν , οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. , δηλ. υπάρχει $\xi \in (0, x)$

$$\text{τέτοιο ώστε } \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) = x \cdot f'(\xi) \\ (f(0) = 0) .$$

β) Καταρχάς , η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως λόγος των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)$ και x .

$$\text{Άρα } g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x \cdot f'(x) - x \cdot f'(\xi)}{x^2} , \text{ αφού } \forall x \in (0, +\infty) ,$$

υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει το συμπέρασμα του α) ζητούμενου.

$$\text{Οπότε , } g'(x) = \frac{x \cdot [f'(x) - f'(\xi)]}{x^2} .$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι η f είναι κυρτή , δηλ. η f' είναι γν.αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Έτσι , $0 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow 0 < f'(x) - f'(\xi)$ και $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Άρα , $g'(x) > 0 \Rightarrow$ η g είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Αφού η g είναι γν.αύξουσα και συνεχής στο $(0, +\infty)$, θα ισχύει ότι :

$$g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) .$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ (απροσδιοριστία)}$$

(Εξήγηση : Ο παρονομαστής τείνει προφανώς στο 0 . Ο αριθμητής τείνει στο $f(0) = 0$, επειδή η f είναι συνεχής και στο 0 (ως παραγωγίσιμη στο

$$[0, +\infty)) . \text{ Από D.L.H. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 0 ,$$

λόγω της συνέχειας της f' στο $[0, +\infty)$.

$$\text{Επίσης , } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (απροσδιοριστία) .}$$

Εξήγηση : Από τα δεδομένα του γ) ζητούμενου , έχουμε $f(D_f) = [0, +\infty)$.

Όμως η f' είναι γν.αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και $f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Άρα η f είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεχής στο 0, άρα συνεχής στο

$[0, +\infty)$ και γν.αύξουσα σ' αυτό. Έτσι, $f(D_f) = [0, +\infty) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

Δηλαδή, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επίσης, το x του παρονομαστή τείνει στο $+\infty$.

Έχουμε λοιπόν, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$,

από τα δεδομένα του γ) ζητούμενου, άρα $g((0, +\infty)) = (0, 2)$.