

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4+x^2+\eta\mu 2x}}{x^2+x} , & \text{για } x > 0 \\ e^x + \lambda , & \text{για } x \leq 0 \end{cases}$

i) Να βρείτε το λ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta - 4 , & \text{αν } x < -2 \\ \text{συν}\pi x , & \text{αν } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{\alpha x + \beta}{1+x^2} , & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε η f να είναι συνεχής στα σημεία $x = -2$ και $x = 1$.

3) Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $A_f = (-1, 1)$, για την οποία

ισχύουν τα εξής : α) Η f είναι συνεχής στο A_f ,

β) Για κάθε $x \in A_f$ ισχύει ότι $|xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$.

Να υπολογισθεί το $f(0)$.

4) Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} , \text{ να δείξετε :}$$

α) Αν η f είναι συνεχής στο 0 , τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

5) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε

ότι : i) Αν η f είναι συνεχής στο 1 , τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

ii) Αν η f είναι συνεχής στο $\alpha \neq 1$ και $\neq 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x)\sin 2y + f(y)\sin 2x \quad \text{για κάθε } x, y \in R.$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να αποδείξετε ότι : α) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sin 2a$

για κάθε $a \in R$ και β) Η f είναι συνεχής για κάθε $x \in R$.

7) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, 1] \rightarrow R$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο $(0, 1]$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$2x_0 \ln x_0 = 2 - 3x_0.$$

8) Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda \in (0, 1)$ και οι συνεχείς συναρτήσεις

$$f, g \text{ στο } [\alpha, \beta]. \text{ Αν } f(x) < g(x) \quad \forall x \in [\alpha, \beta], \quad f(\alpha) = \alpha, \quad g(\beta) = \beta,$$

να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\lambda f(\xi) + (1 - \lambda)g(\xi) = \xi$.

9) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$,

$$\text{να δείξετε ότι υπάρχει } \xi \in [\alpha, \beta] \text{ ώστε } f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

10) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, η οποία είναι συνεχής, $f(1) = 1$ και για

την οποία ισχύει $f(3) \cdot f(4) < 0$, αποδείξετε ότι :

α) $f(1) \cdot f(2) > 0$

β) Η εξίσωση $xf(x)f(x+1) = 1 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

11) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με $f(3) = 2$. Αν $\forall x \in R$ ισχύει

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1, \text{ να βρείτε τα } f(2), f(1).$$

12) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, για την οποία ισχύουν τα εξής :

α) $(x - 2)f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2, \quad \forall x \in R$

β) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-5}{h} = 9$

i) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3, \lambda = -7$ και να βρείτε τον τύπο της f .

13) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με $xf(x) + f^3(x) + 1 \leq 0 \quad \forall x \in R$,

Να δείξετε ότι : α) Η f διατηρεί πρόσημο στο R , β) $f^2(x) > -x$,

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f^2(x)} = 0$, δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^2(x) = +\infty$.

14) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^x - (x+2)$ έχει :

α) Μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$

β) Δύο τουλάχιστον αντίθετες ρίζες.

15) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 2) = 1$ (1), έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 (με $x_1 < x_2$) είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να δείξετε

ότι η εξίσωση $\frac{f(x)-4}{x-x_2} + \frac{f(3-f(x))-2}{x-x_1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα (x_1, x_2) .

δ) Να αποδείξετε ότι $\forall x \in R$ ισχύει ότι $f(f^3(x)) \geq f(f^2(x))$.

16) α) Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \quad x \in R$$

β) Ομοίως, όταν ισχύει ότι $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1, \quad x \in R$.

17) Έστω f πολυωνυμική συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού και $f(x) = x^2, x \in R$

