

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\int_0^2 (x^3 - 4x + \sqrt{x}) dx, \quad \int_1^4 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx, \quad \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi x \, dx$$

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx, \quad \int_0^{\pi} \eta \mu^3 x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^2 x \, dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2} dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu x + 1} dx, \quad \int_3^4 \frac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2} dx, \quad \int_1^e x^{\nu} \ln x \, dx, \quad \int_0^{\pi} x^2 \eta \mu x \, dx$$

$$\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx, \quad \int_0^1 \frac{2e^{3x} - 5e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 6} dx, \quad \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\eta \mu^2 x}$$

$$\int_0^1 x(1-x)^8 dx, \quad \int_0^{\pi} e^x (\sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x) dx, \quad \int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}} \frac{\eta \mu(\frac{1}{x})}{x^2} dx$$

2) Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(x) = 2xe^{-f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρεθεί η } f, \text{ αν δοθεί ότι } f(0) = 1.$$

3) Για τη συνάρτηση g ισχύουν $g(2) = 10$ και $g'(x + x^3) = 8x, \forall x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $g(0)$.

4) Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)f(x) = e^x + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

και $f(0) = 2$. Να βρεθεί η συνάρτηση f .

5) Να βρεθεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f'(e^x) = x + 1 \text{ και η } C_f \text{ διέρχεται από το σημείο } A(e, -e). \text{ Έπειτα,}$$

να δειχθεί πως η f δεν έχει σ.κ. .

6) Να βρεθεί η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, όταν για κάθε $x > 0$ ισχύει $f''(x) = \frac{1}{x^2}$,

$$f(1) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

7) Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = x \cdot (x^2 + 1)e^{x^2 - f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } f(0) = 0.$$

Να βρεθεί ο τύπος της.

8) Αν $\int_{-2}^3 f(x) dx = 5$, $\int_2^3 f(x) dx = 4$ και $\int_2^{10} f(x) dx = 8$, να βρείτε

τα ολοκληρώματα : $\int_{-2}^2 f(x) dx$, $\int_3^{10} f(x) dx$, $\int_{-2}^{10} f(x) dx$.

9) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 (|x - 1| + |2x - 1| + x) dx$

10) Ομοίως το $\int_1^{2e} (f \circ g)(x) dx$, με $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln^2 x - 2 \ln x + 1$

11) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x) dx$, όταν

$$f(x) = \begin{cases} e^x , & \text{αν } x < 0 \\ x \sin x + 1 , & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} .$$

12) i) Έστω η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Να δείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια , τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$.

β) Αν η f είναι περιττή , τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$.

ii) Αν η $f: R \rightarrow R$ είναι περιοδική , τότε $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$, όπου T είναι η περίοδος της συνάρτησης .

13) Δίνονται τα ολοκληρώματα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x} dx$ και $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x} dx$

α) Να αποδείξετε ότι $I = J$.

β) Να βρεθούν τα I και J .

14) Αφού αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$ έχει

αντίστροφη , να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f^{-1}(x) dx$.

15) Έστω συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με σύνολο τιμών το R , η οποία είναι

παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$, $\forall x \in R$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x) dx$.

16) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow R$ μία συνάρτηση , με $f(0) = 1$, παραγωγίσιμη

στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $xf'(x) = \int_0^1 f(t) dt + f(x)$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

17) Δίνεται ότι $f'(x) + f^3(x) = f^2(x)$, με $f(x) \neq 0$, $\forall x \in R$ και

$$f(0) = f(1) . \text{ Να βρείτε το } \int_0^1 f(x) dx .$$

18) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } \int_0^2 f^2(x) dx > 6 \int_0^2 f(x) dx - 18 .$$

19) Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^x , & x > 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$ να δειχθεί ότι

$$e^{-\frac{1}{e}} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1 .$$

20) Δίνεται η $f: R \rightarrow R$, μία συνάρτηση με f' συνεχή στο R με $f(0) = 1$, η οποία είναι κυρτή . Να δείξετε ότι :

$$\alpha) f(x) \leq xf'(x) + 1 , \forall x \geq 0 .$$

$$\beta) \int_0^1 f(x) dx < \frac{1+f(1)}{2} .$$

21) Αν η συνάρτηση g έχει τη δεύτερη παράγωγο συνεχή στο R , παρουσιάζει ακρότατο στο $A(0, 2)$ και η C_g εφάπτεται στον $\chi\chi$, στο $x_0 = 2$, να δείξετε ότι $\int_0^2 \frac{1}{e^x} [g(x) - g''(x)] dx = 2$.

22) Αν η $F(x)$ είναι αρχική της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ με $F(1) = 0$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 F(x) dx$.

23) Να αποδειχθεί η ανίσωση $\int_{\frac{1}{2e}}^1 x^x dx \geq e^{-\frac{1}{e}} \left(1 - \frac{1}{2e}\right)$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$

i . Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

ii . Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^2 e^{x^2} dx \geq 6$.

25) Να αποδείξετε ότι $2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x \cdot e^{-vx} dx \leq e$, $v \in N^*$.

26) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x$, τον άξονα $\chi\chi$ και τις ευθείες $x = -2$, $x = 2$.

27) Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f

$$\text{της συνάρτησης } f(x) = \begin{cases} e^x , & x \leq 0 \\ 1 - x , & x > 0 \end{cases} , \text{ τις ευθείες } x = -1 , x = 2$$

και τον άξονα $\chi\chi$.

28) Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \frac{2}{x^2}$ και της $g(x) = 3 - x^2$, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - 3$, με $x > 0$.

- i. Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την C_f , την εφαπτόμενή της στο σημείο $A(1, -2)$ και τον άξονα x .
- ii. Να βρεθεί η ευθεία $x = \alpha$, που χωρίζει το παραπάνω εμβαδό σε δύο ισοδύναμα χωρία.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- iii. Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την C_f , τη $C_{f^{-1}}$, την $y = 1$ και την $x = 1$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$.

- i. Να βρείτε την εφαπτόμενη (ϵ) της f , που διέρχεται από το $(0, 0)$.
- ii. Να βρεθεί το εμβαδό $E(\alpha)$, χωρίου Ω , που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ), τον άξονα x και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha > 0$.
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.
- iv. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 3 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$, τη στιγμή που είναι $\alpha = 1$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 1}{x^2}$ με $x > 0$.

- i. Να βρεθεί η ασύμπτωτη (ϵ) της C_f στο $+\infty$.
- ii. Να βρεθεί το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία (ϵ) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \alpha$, με $\alpha > 1$.
- iii. Αν το α αυξάνεται με ρυθμό 4 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , ως προς το χρόνο, τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = 2$.

33) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[1, 4]$, τέτοια ώστε $\int_1^4 f(x) dx = 12$.

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2\xi - 1$.

34) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, με $F(1) = 0$ και ισχύει $(x - 2)F(x) \leq e^{x-2} - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\int_1^2 f(t) dt$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f(\xi) + F(\xi) = 0$.

35) Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$, ώστε η εφαπτόμενη της C_F στο $M(0, F(0))$, να έχει εξίσωση $2x - y + 4 = 0$.

i. Να βρείτε τις τιμές $F(0)$ και $f(0)$.

ii. Να βρείτε την κυρτότητα της F .

iii. Να αποδείξετε ότι $F(3) + F(-7) > 0$.

iv. Να αποδείξετε ότι $F(x + 2) - F(x) > 4$, για κάθε $x > 0$.

36) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ και F μία παράγουσα της f στο $[0, +\infty)$, $F(0) = f(0) = 1$ και $F(x) > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$.

Αν ισχύει $f'(x)F(x) < [F(x)]^2$, $\forall x > 0$, τότε να αποδείξετε ότι $F(x) \leq e^x$, $\forall x \geq 0$.

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ και F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, με $F(1) = 0$.

i. Να λύσετε την εξίσωση $2F(x) = f(x) - e$

ii. Αν E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$, να

δείξετε ότι $E > \frac{e-1}{2}$.